

Préparation à l'oral 2015 - CCP
Indications sur certains exercices à la fin

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
 - a) Montrer que, si $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, alors $(P_k(X-a))_{0 \leq k \leq n}$ aussi.
 - b) On suppose $a \neq b$. Montrer que $((X-a)^k(X-b)^{n-k})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. (TPE) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_n$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont les $D_k = \sum_{i \neq k} C_i$. Calculer $\det B$ en fonction de $\det A$.
3. (Mines d'Alès). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^4 = 0$. Montrer que $I_n + A$ est inversible et calculer son inverse en fonction de A .
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 2. Montrer qu'il existe deux familles libres (A, B) et (F, G) de colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $M = A^t F + B^t G$. Montrer la réciproque.
5. (INT) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de M est égal à p si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
6. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker } u = F$ et $\text{Im } u = G$.
7. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$. Montrer que A est inversible ; en déduire que A et B commutent.
8. Soit E_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ij}$. Déterminer le minimum et le maximum de Φ sur $E_n \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
9. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = X^n P(1/X)$. Montrer que u est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$. En donner une base de vecteurs propres.
10. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = X^t Y$.
 - a) Quel est le rang de M ? Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(M - \lambda I_n)$ en fonction de $m = {}^t Y X$.
 - b) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. En calculant $\det(M + I_n)$, montrer que $1 + {}^t X A^{-1} X = \frac{\det(X^t X + A)}{\det A}$.
11. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $bc \neq 0$ et $n \geq 3$. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $m_{nj} = b$ et $m_{jn} = c$ pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $m_{nn} = a$, les autres coefficients étant nuls.
 Déterminer le rang de M et ses valeurs propres. La matrice M est-elle diagonalisable ?
12. Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que J et K sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
 et déterminer leurs éléments propres. Diagonaliser $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
13. (ENSEA) Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $M_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2(1+a) & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M_a soit diagonalisable.
14. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u + \text{tr}(u)\text{Id}_E$. L'application Φ est-elle diagonalisable ?
15. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.
 - a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
 - b) Montrer que 0 est valeur propre de B . Déterminer la dimension de $\text{Ker } B$.
 - c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

16. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - 3A$. Montrer que A n'est pas inversible.
17. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$. On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f . Montrer que f est diagonalisable.
18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer le spectre de A et trouver une matrice diagonale D semblable à A .
 - Montrer que toute matrice commutant avec D est nécessairement diagonale.
 - Soit $P = X^7 + X + 1$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = A$.
19. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Montrer que A n'est pas diagonalisable.
 - Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A . Montrer qu'il existe une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$, que l'on explicitera, dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
20. (Mines d'Alès) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_A : x \mapsto \det(xI_n - A)$. Montrer que, si x n'est pas valeur propre de A , alors $\text{tr}((xI_n - A)^{-1}) = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}$.
21. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u .
- Démontrer que $\chi_u(u) = 0$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
 - Soit $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \in E$. Calculer $\det_e(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$.
 - Montrer que les valeurs propres de u sont toutes simples si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
22. Soient $e = (e_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ tel que $u(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$ et $u(e_k) = e_{k-1} + e_k$ si $k \geq 2$; soit A la matrice de u dans e .
- Calculer le polynôme caractéristique de A .
 - Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A .
 - Déterminer les valeurs propres complexes de A et en déduire $\prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
23. (TSP (?)). Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit un endomorphisme F_u de $\mathcal{L}(E)$ par $F_u(v) = u \circ v$.
- Quels sont les éléments propres de F_u ?
 - Montrer que F_u est diagonalisable si et seulement si u l'est.
24. (TPE) Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{1,n} = 1$, $a_{j+1,j} = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, tous les autres coefficients étant nuls. Soit $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - Montrer que B est inversible si et seulement si $\text{pgcd}(n, p) = 1$.
25. (ENSEA) Soient E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_k | x)^2$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
26. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.
 - Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de F .
 - Calculer la distance de X^n à F .
27. Calculer $m = \inf \left\{ \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
28. a) Montrer que l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto (A|B) = \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- b) Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec M symétrique et N antisymétrique. Montrer que $(M|N) = 0$.
- c) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comment choisir $S = (s_{ij})$ symétrique pour que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - s_{ij})^2$ soit minimal ?
29. (Navale) Montrer que toute matrice réelle inversible s'écrit comme le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure ; on pourra penser au procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.
30. Soit E un espace euclidien, a et b deux vecteurs unitaires indépendants, et $u : x \in E \mapsto (a|x)b + (b|x)a$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique, et donner ses éléments propres.
31. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $\operatorname{tr}(A)^2 \leq \operatorname{rg}(A) \operatorname{tr}(A^2)$.
32. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique bijectif.
33. Soit E l'espace des suites complexes bornées. Montrer que $N : u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k|}{2^k}$ et $N' : u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k|}{k!}$ sont deux normes sur E . Sont-elles équivalentes ?
34. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n \quad \binom{n}{k} \leq n^k$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
- b) Soit (u_n) une suite réelle, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_n$. On suppose dans cette question que (u_n) a pour limite 0.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=n_0}^n \binom{n}{k} u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, puis que (v_n) a pour limite 0.
- c) Que peut-on dire de (v_n) si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$?
35. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable en 0. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
- Étudier la convergence de la suite (u_n) .
36. Soient $f : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1} - \frac{2}{x^2}$. Montrer que f et g sont prolongeables par continuité en 0 ; puis que, après prolongement, elles sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
37. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto e^x + x - n$.
- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$; on note u_n cette solution.
- b) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- c) Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la série de terme général $v_n = u_n - a \ln n - b \frac{\ln n}{n}$ soit convergente.
38. Nature des séries de termes général $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n}$; $c_n = (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$?
39. (Mines d'Alès) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$.
- a) Montrer que (u_n) a pour limite 0.
- b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| - |u_{n+1}| = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ où $w_k = (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \right)$. En déduire que la série de terme général u_n converge.
40. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \exp\left(-\frac{u_n}{n+1}\right)$.
- a) Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$.
- b) Étudier la convergence des séries $\sum v_n$ et $\sum (-1)^n v_n$.

41. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1} - \ln n$.
- Donner un équivalent de $u_{n-1} - u_n$; en déduire que la suite (u_n) converge. On notera α sa limite.
 - En remarquant que $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, étudier la convergence de la série $\sum (u_n - \alpha)$.
 - Étudier la convergence des séries $\sum (u_n - \alpha)^n$, $\sum (-1)^n (u_n - \alpha)$ et $\sum n^{-u_n}$.
42. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_n^{n+1} \ln \Gamma(t) dt$, où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$.
43. (ENSEA) Soit (u_n) une suite réelle décroissante, telle que la série de terme général u_n converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.
Montrer que la série de terme général v_n converge, et calculer sa somme.
44. a) Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \frac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}$.
- En étudiant la suite $\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$, déterminer un équivalent de u_n .
45. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes absolument convergente. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{nu_k}{k(k+1)}$.
46. Soit f une fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ et à valeurs dans I vérifiant :
- $\forall x \in I \quad f(x+1) = xf(x)$
 - $f(1) = 1$
 - $\varphi = \ln f$ est convexe
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0, 1[\quad \ln n \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$.
 - En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0, 1[\quad 0 \leq \varphi(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 - En déduire que f est unique, et égale à la fonction Γ .
47. Soit $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$.
- Montrer que f est intégrable sur $]0, 1[$, et que $\int_0^u f(t) dt = \int_u^{u^2} \frac{dt}{\ln t}$ pour tout $u \in]0, 1[$.
 - En utilisant $\frac{1}{\ln t} = \frac{t}{t \ln t}$, montrer que $u^2 \ln 2 \leq \int_0^u f(t) dt \leq u \ln 2$ pour tout $u \in]0, 1[$. Que vaut $\int_0^1 f(t) dt$?
48. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_x^{x^3} f(t) dt$.
- Montrer que g est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$, de $f(x)$ et de $f(x^3)$.
 - Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, et préciser par quelle valeur.
49. Soit $k \in \mathbb{N}$, vérifiant $k \geq 2$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln^k x}{1-x}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
 - Calculer la valeur de l'intégrale.
50. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-[x]} dx$ où $[x]$ est la partie entière de x .
51. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} \sin\left(\frac{t}{n}\right) dt$. Justifier l'existence de I_n . Déterminer la limite de I_n , puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
52. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \pi/2]$, on pose $f_n(t) = n \cos^n t \sin t$.

a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) . Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, \pi/2]$? sur $[a, \pi/2]$ pour $a > 0$?

b) Montrer que, si $g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t) dt = g(0)$.

53. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Calculer $f(x-1) - f(x)$ pour tout x pour lequel l'expression est définie. En déduire, pour tout $x \in D$, une expression de $f(x)$ sous forme de somme de série.

d) Peut-on retrouver cette expression d'une autre manière ?

54. Après avoir justifié l'existence des intégrales, montrer que

$$\forall x > 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$$

55. a) Résoudre l'équation $\text{sht} = 1$.

b) Soit $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^\alpha (\text{sht})^n dt$. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. Déterminer un équivalent de I_n .

56. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Déterminer a et b vérifiant $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$; on exprimera b sous forme d'une intégrale.

57. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n + n^3 t^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$. Si $a > 0$, a-t-on convergence uniforme sur $[a, +\infty[$?

b) Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$? convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?

58. Soient $\alpha \in [0, 2[$ et $f : x \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2-\alpha} e^{-px}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la convergence soit normale sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha = 1$, a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?

59. Montrer que $S : t \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cos^n t \sin(nt)$ est définie et de classe C^1 sur l'intervalle $]0, \pi[$. Déterminer S' , puis S .

60. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t > 0 \mapsto \frac{1}{n^2 t + n}$. Montrer que la fonction $S : t \mapsto \sum_{n \geq 1} f_n(t)$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver un équivalent de $S(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

61. Rayon de convergence et somme de $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{ch} n}{n} t^{2n}$; de $g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} t^n$.

62. Soit (a_n) une suite de réels positifs, avec $a_1 \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ vérifiant $P_n(x_n) = 1$.

b) Montrer que la suite (x_n) converge ; soit ℓ sa limite.

c) Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$; soit R le rayon de convergence de cette série entière. Montrer que :

i. $\ell = 0 \implies R = 0$;

ii. $\ell > 0 \implies R \geq \ell$;

iii. $\ell < R \implies S(\ell) = 1$.

d) Déterminer ℓ et R si $a_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$.

63. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$.

a) Justifier l'existence de I_n . Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite, et en déduire l'expression de I_n en fonction de n et I_0 .

- b) Donner une expression simplifiée de $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$.
64. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$.
65. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est définie et de classe C^∞ sur $[-1, 1]$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
66. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit la fonction $u(f) : x \mapsto \int_0^x e^t f(x-t) dt$. Montrer que u est un endomorphisme de E ; déterminer ses éléments propres.
67. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\Phi(f) = g : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.
- a) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
- b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ ; préciser la dimension de ces derniers.
- c) Déterminer $\text{Ker } \Phi^2$.
68. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + xy' - y = x\sqrt{1+x^2}$ à l'aide du changement de variable $x = \sinh t$.
69. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$. Étudier la parité de f . Donner une équation différentielle satisfaite par f . Après avoir justifié son existence, en déduire le développement en série entière de f .
70. Soit $(E) : x(x-1)y' + y = \ln x$.
- a) Montrer que (E) admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Après en avoir justifié l'existence, calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$.
71. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
- a) Montrer que, si $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) + P'(x) \geq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$.
- b) Montrer que, si $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) - P''(x) \geq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$.
- c) Si $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) - P'(x) - P''(x) + P^{(3)}(x) \geq 0$, a-t-on forcément $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$?
72. a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.
- b) Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $h : x \mapsto \frac{1}{2} \int_0^x g(t) \sin(2x-2t) dt$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + 4y = g(t)$. Déterminer toutes les solutions de cette équation.
- c) Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f'' + 4f \geq 0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$.
73. Pour $x > 0$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x, y) = \frac{x^n}{\sqrt{n+y^n}}$. Déterminer le domaine de définition de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
74. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
75. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, et telles que X et $X + Y$ suivent la même loi.
- a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = \max\{P(X = x) ; x \in \mathbb{R}\}$.
- b) Soit $y \in \mathbb{R}$; montrer que $P(X = a - y) = P(X = a)$ ou $P(Y = y) = 0$. En déduire que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid P(Y = y) \neq 0\}$ est fini.
- c) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $P(Y = y) \neq 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = a - ny) = P(X = a)$. Montrer que la variable Y est presque sûrement nulle.
76. On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2 . On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce ; plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$.

- a) Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n -ème lancer ?
- b) Quelle est la probabilité, notée r_n , d'obtenir pile au n -ème lancer ? Calculer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.
77. Soient n et N des entiers naturels non nuls. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On effectue N tirages avec remise dans cette urne.
- a) Soit F_i la variable aléatoire égale au nombre de fois où le jeton i a été tiré. Déterminer la loi de F_i .
On pose $F = \sum_{i=1}^n F_i$. Déterminer la loi de F , son espérance et sa variance.
Les variables aléatoires F_i sont-elles deux à deux indépendantes ?
- b) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le numéro i n'a pas été tiré et égale à 1 s'il a été tiré au moins une fois. Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance.
Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, déterminer la probabilité $P(X_j = 0 | X_i = 0)$.
Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
78. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire indéfiniment une boule avec remise. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k le rang de première apparition de la k -ème nouvelle valeur ; ainsi, si les tirages débutent par $(5, 5, 8, 5, 8, 2, \dots)$, on a $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 6$.
- a) Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer la loi de $X_{k+1} - X_k$.
- b) Donner une expression de $E(X_n)$ sous forme de somme, puis donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
79. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, strictement positives, indépendantes et de même loi.
- On pose : $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = \frac{X_1}{U}$, $Y_2 = \frac{X_2}{U}$.
- a) Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et admettent des moments de tous ordres. Calculer $E(Y_1)$ et $E(Y_2)$.
- b) En déduire que $\frac{T}{U}$ admet des moments de tous ordres. Calculer $E\left(\frac{T}{U}\right)$.
- c) Montrer que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -V(Y_1)$. En déduire une formule reliant $V\left(\frac{T}{U}\right)$ et $V(Y_1)$.
80. Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binômiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.
- a) Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P(X_n \leq a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- b) Montrer que, si $b > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min\{\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\}$$

Qu'en déduit-on pour $P(|X_n - np| \leq nb)$ quand n tend vers $+\infty$?

Indications

2. Exprimer les D_k à l'aide de $S = \sum C_i$, puis développer le déterminant par multilinéarité.
4. Commencer par le cas où $M = J_2 = \text{diag}(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$.
5. On peut commencer par déterminer une matrice inversible P telle que MP soit de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}$.
8. Pour être inversible, une matrice ne doit pas avoir de colonne nulle, ni deux colonnes égales.
11. Pour les valeurs propres non nulles, examiner $\text{tr } M$ et $\text{tr}(M^2)$.
20. Quelles sont les valeurs propres de $(xI_n - A)^{-1}$? Penser aussi à la dérivée logarithmique.
23. b) Examiner les dimensions des sous-espaces propres.
24. b) Déterminer les valeurs propres de A , puis de B .
25. Utiliser $\|e_i\|^2$ pour prouver l'orthogonalité, et étudier l'orthogonal de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
28. c) Il s'agit de trouver le projeté orthogonal de A sur l'espace des matrices symétriques.
35. Utiliser un DL_1 de f en 0.
39. Penser au signe du reste d'une série alternée.
41. c) Pour $\sum n^{-u_n}$, évaluer u_n par comparaison à une intégrale.

43. Commencer par exprimer les sommes partielles de $\sum v_n$ à l'aide, entre autres, de celles de $\sum u_n$.
46. a) Utiliser $a < b < c \implies \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} \leq \frac{\varphi(c) - \varphi(a)}{c - a} \leq \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{c - b}$. c) Pour la convexité de $\ln \Gamma$, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales.
51. Pour l'équivalent, comparer à $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} \frac{t}{n} dt$ en séparant les intégrales sur $[0, n]$ et $[n, +\infty[$.
52. b) Commencer par le cas $g(0) = 0$, et couper l'intervalle en $1/n^2$.
54. Montrer que les deux expressions ont même dérivée.
56. Poser $t^n = u$ pour obtenir a ; puis utiliser un développement asymptotique de $u^{1/n}$.
65. Pour la série entière, majorer $|f^{(k)}|$ pour tout k à l'aide du théorème sur les séries alternées, puis utiliser Taylor-Lagrange.
66. On pourra effectuer le changement $u = t - x$ dans l'intégrale.
71. a) Multiplier la première inégalité par e^x . b) Noter que $P - P'' = (P + P') - (P + P)'$.
72. c) Poser $g = f'' + 4f$, et utiliser b).
80. a) Utiliser l'inégalité de B-T, en notant que $(X_n \leq a) \subset |X_n - E(X_n)| \geq E(X_n) - a$ à partir d'un certain rang. b) Il y a en fait deux inégalités à prouver; l'une se déduit de B-T, l'autre de l'inégalité de Markov en prouvant $E(\sqrt{Y}) \leq \sqrt{E(Y)}$.