Sujet 1 (2018 1114 Centrale PSI)

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On pose $S(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}$.

1) **a)** Montrer que $S(P)$ est bien défini.

b) Montrer que S est une forme linéaire.

c) Calculer avec Python $\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{50} \frac{P(k)}{k!}$ avec $P = X^d$, $d \in \{1, \dots, 10\}$, puis avec $P = X^9 + 36X^6 - X^3 + X^2 - 3$. Observations ?

2) Soit (H_n) la suite de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = (X-n)H_n$.

a) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $S(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Comment calculer $S(P)$ pour P quelconque ?

On assimile un polynôme $P = \sum_{k=0}^{9} a_k X^k$ à la liste $[a_0, \dots, a_9]$ de ses coefficients dans la base canonique.

a) Écrire une fonction permettant de calculer les coefficients de H_n pour $1 \leqslant n \leqslant 9$.

b) Donner la valeur exacte de $S(Q)$ pour $Q = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X + 5$.

c) Expliquer les observations de la fin de la première question.

Solution :

1) **a)** Si n est le degré de P et α son coefficient dominant, on a $P(x) \sim \alpha x^n$ quand $x \to +\infty$, donc $\frac{P(k)}{k!} \sim \frac{\alpha k^n}{k!} = \mathrm{O}(\frac{1}{k^2})$ quand $k \to +\infty$.
Le critère de domination assure donc la convergence de la série $S(P)$.

b) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'identité $\frac{(\lambda P + \mu Q)(k)}{k!} = \lambda\frac{P(k)}{k!} + \mu\frac{Q(k)}{k!}$.
On peut sommer ces égalités (les séries convergent d'après la question précédente) pour obtenir

$$S(\lambda P + \mu Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda P + \mu Q)(k)}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!} + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q(k)}{k!} = \lambda S(P) + \mu S(Q).$$

c)

```
>>> from math import factorial,exp
>>> def somme(P):
        s = 0
        for i in range(51):
            s+ = P(i)/factorial(i)
        return(s)
>>> for d in range(10):
        P = lambda x:x**d
        print(somme(P)/exp(1))
1.0000000000000002
1.0000000000000002
2.0
5.000000000000001
15.000000000000002
51.99999999999998
```

```
203.0
876.9999999999999
4140.0
21147.000000000004
>>> P = lambda x:x**9 + 36*x**6 - x**3 + x**2 - 3
 >>> somme(P)/exp(1)
28448.999999999985
```

Les résultats numériques permettent de formuler l'hypothèse que $\frac{1}{e}S(P)$ est un entier lorsque P est à coefficients entiers...

2) **a)** La famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de polynômes de degrés étagés, c'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $H_n(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i) = 0$ si $k \leqslant n-1$, et $H_n(k) = \frac{k!}{(k-n)!}$ si $k \geqslant n$. Il vient

$$S(H_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{k!(k-n)!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = e.$$

Ce résultat reste valable pour $n = 0$.

c) Il suffit de décomposer P dans la base $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour calculer $S(P)$ par linéarité. Précisément, si $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k$ alors $S(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k S(H_k) = e\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

Pour ce faire, si $n = \deg(P)$, il suffit de faire la division euclidienne de P par H_n pour trouver α_n (quotient) et le reste, qui vaut $P - \alpha_n H_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k H_k$. On itère alors le procédé avec une division par H_{n-1}, etc.

Remarque. — Si P est à coefficients entiers, α_n est le coefficient dominant de P donc un entier (H_n est unitaire). Et le reste de la division euclidienne vaut $P - \alpha_n H_n$ donc reste à coefficients entiers. En itérant, tous les coefficients α_k sont des entiers donc $\frac{1}{e}S(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ est un entier.

Sujet 2(RMS 2016 769 Centrale PSI)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Soient $\sigma = (P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et f la fonction vectorielle définie par $f(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)P_k$. On dit que la courbe paramétrée par f est la *courbe de Bézier* associée à σ.

1) Cas $n = 3$. On donne $P_0 = (-2, 2)$, $P_1 = (1, 5)$, $P_2 = (5, 3)$ et $P_3 = (3, 1)$.

a) Calculer $f(t)$ pour $t \in [0, 1]$.

b) Tracer sur le même graphe la courbe paramétrée par f et la ligne polygonale joignant P_0, P_1, P_2, P_3.

2) Cas général. On suppose $n \geqslant 2$.

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$ en fonction des points P_k.

b) Montrer que la famille $(B_{n,k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que toute fonction vectorielle polynomiale est une courbe de Bézier.

c) Soit $g(t) = (-t^3 + 2t + 1, t^3 + 5t^2 - 2)$. À quelle suite σ la courbe paramétrée par g est-elle associée ?

3) Tracer sur un même graphe les courbes représentatives sur $[0,1]$ des fonctions $B_{7,k}$ pour $k \in \{1,\ldots,6\}$. Pour quelles valeurs de k la norme $\|B_{7,k}\|_\infty$ est-elle maximale ? Conjecturer le résultat pour n entier quelconque. Que vaut $\alpha_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \|B_{n,k}\|_\infty$?

Solution :

1) On peut bien sûr programmer une classe polynôme, etc. Comme $n = 3$ ici, le parti pris dans ce qui suit est de manipuler les polynômes comme des listes de taille 4 (leurs coefficients).
Cas $n = 3$. On donne $P_0 = (-2,2)$, $P_1 = (1,5)$, $P_2 = (5,3)$ et $P_3 = (3,1)$.

a)

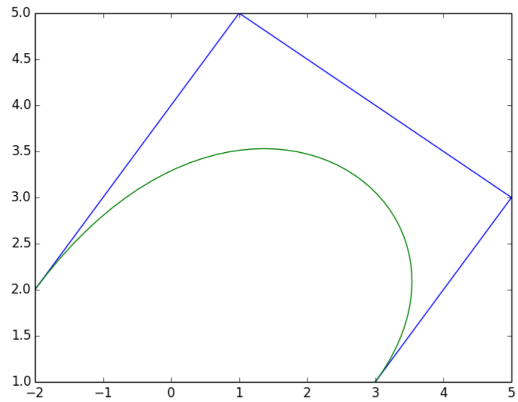
```
>>> B0 = [1, - 3, 3, -1]
>>> B1 = [0, 3, -6, 3]
>>> B2 = [0, 0, 3, - 3]
>>> B3 = [0, 0, 0, 1]
>>> X = [-2, 1, 5, 3]
>>> Y = [2, 5, 3, 1]
>>> PX = [0, 0, 0, 0]
>>> for k in range(4):
        PX[k] = X[0]*B0[k]+X[1]*B1[k]+X[2]*B2[k]+X[3]*B3[k]
>>> PX
[-2, 9, 3, -7]
>>> PY = [0, 0, 0, 0]
>>> for k in range(4):
        PY[k] = Y[0]*B0[k]+Y[1]*B1[k]+Y[2]*B2[k]+Y[3]*B3[k]
>>> PY
[2, 9, -15, 5]
```

f est donc la fonction polynomiale $t \mapsto \big(-2 + 9t + 3t^2 - 7t^3, 2 + 9t - 15t^2 + 5t^3\big)$.

b)

```
>>> import numpy as np
>>> T = np.linspace(0, 1)
>>> X1 = []
>>> Y1 = []
>>> for k in range(len(T)):
        X1.append(PX[0]+T[k]*PX[1]+T[k]**2*PX[2]+T[k]**3*PX[3])
        Y1.append(PY[0]+T[k]*PY[1]+T[k]**2*PY[2]+T[k]**3*PY[3])
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> plt.plot(X, Y)
>>> plt.plot(X1, Y1)
>>> plt.show()
```

On obtient le tracé



2) **a)** Comme $B_{n,k}(0) = 0$ sauf pour $k = 0$, il vient $f(0) = B_{n,0}(0)P_0 = P_0$. De même $B'_{n,k}(0) = 0$ pour $k \geqslant 2$, et $B'_{n,0}(0) = -n$ et $B'_{n,1}(0) = n$, donc $f'(0) = -nP_0 + nP_1$. (Donc $\overrightarrow{P_0P_1}$ dirige la tangente en $P_0 = f(0)$.)
Symétriquement, on obtient $f(1) = P_n$ et $f'(1) = -nP_{n-1} + nP_n$.

b) La famille $(B_{n,k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est étagée en valuations (seul $B_{n,0}$ a un coefficient constant, seuls $B_{n,0}$ et $B_{n,1}$ ont un terme de degré 1, etc), ce qui fait que la matrice de la famille dans la base canonique est "anti-triagulaire", en particulier échelonnée donc inversible. C'est donc une matrice de passage et les $B_{n,k}$ forment donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On en déduit que toute fonction polynomiale scalaire de degré n s'écrit $t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k}(t)$. Si f est une fonction vectorielle polynomiale, de la forme $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ avec f_1, f_2 de degrés au plus n, alors il existe une (unique) famille de scalaires $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n)$ telle que f s'écrive $t \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k}(t), \sum_{k=0}^{n} \beta_k B_{n,k}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)P_k$ où $P_k = (\alpha_k, \beta_k)$, donc f est donc une courbe de Bézier.

c) On a $B_{3,0} = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$, $B_{3,1} = 3X - 6X^2 - 3X^3$, $B_{3,2} = 3X^2 - 3X^3$ et $B_{3,3} = X^3$.
Alors $1+2X-X^3 = B_{3,0}+5X-3X^2 = B_{3,0}+\frac{5}{3}B_{3,1}+7X^2-5X^3 = B_{3,0}+\frac{5}{3}B_{3,1}+\frac{7}{3}B_{3,2}+2X^3 = B_{3,0}+\frac{5}{3}B_{3,1}+\frac{7}{3}B_{3,2}+2B_{3,3}$.
De même $-2 + 5X^2 + X^3 = -2B_{3,0} - 6X + 11X^2 - X^3 = -2B_{3,0} - 2B_{3,1} - X^2 + 5X^3 = -2B_{3,0} - 2B_{3,1} - \frac{1}{3}B_{3,2} + 4X^3 = -2B_{3,0} - 2B_{3,1} - \frac{1}{3}B_{3,2} + 4B_{3,3}$.
Il vient $g(t) = B_{3,0}(t)(1,-2) + B_{3,1}(t)(\frac{5}{3},-2) + B_{3,2}(t)(\frac{7}{3},-\frac{1}{3}) + B_{3,3}(t)(2,4)$, d'où σ.

3) On peut se contenter des courbes des fonctions $B_{7,k}$ pour $k \in [\![1,3]\!]$, les trois autres s'en déduisent par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

```
>>> f = lambda x:7*x*(1 - x)**6
>>> g = lambda x:21*x**2*(1 - x)**5
>>> h = lambda x:35*x**3*(1 - x)**4
>>> plt.plot(T, f(T))
>>> plt.plot(T, g(T))
>>> plt.plot(T, h(T))
>>> plt.show()
```

Le tracé indique que $\|B_{7,k}\|_\infty$ est maximale pour $k = 1$ (donc pour $k = 6$).

Pour n quelconque, on conjecture que $\alpha_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} \|B_{n,k}\|_\infty = \|B_{n,1}\|_\infty = \|B_{n,n-1}\|_\infty$.

L'étude des variations de la fonction $B_{n,1}$ sur $[0;1]$ montre qu'elle est positive, croissante sur $[0;\dfrac{1}{n}]$ et décroissante ensuite. Donc $\|B_{n,1}\|_\infty = B_{n,1}(\dfrac{1}{n}) = (1-\dfrac{1}{n})^{n-1} \to \dfrac{1}{e}$ quand $n\to+\infty$.

Pour k quelconque, on a de même par l'étude des variations $\|B_{n,k}\|_\infty = B_{n,k}(\dfrac{k}{n}) = \dbinom{n}{k}(\dfrac{k}{n})^k(1-\dfrac{k}{n})^{n-k}$.

Donc $\alpha_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} \dbinom{n}{k}(\dfrac{k}{n})^k(1-\dfrac{k}{n})^{n-k}$

Pour $k\in\{1,n-2\}$, on a après simplification

$$\frac{\|B_{n,k+1}\|_\infty}{\|B_{n,k}\|_\infty} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\left(\frac{n-k-1}{n-k}\right)^{n-k-1} = e^{k\ln(1+\frac{1}{k})-(n-k-1)\ln(1+1/(n-k-1))}.$$

Or la fonction $g\colon x\mapsto \dfrac{1}{x}\ln(1+x)$ est décroissante sur $]0;1]$ donc, lorsque $k\leqslant n-k-1$, soit $k\leqslant\dfrac{n-1}{2}$, on a $\dfrac{1}{k}\geqslant\dfrac{1}{n-k-1}$ donc $g(\dfrac{1}{k})\leqslant g(\dfrac{1}{n-k-1})$ soit $k\ln(1+\dfrac{1}{k})-(n-k-1)\ln(1+\dfrac{1}{n-k-1})\leqslant 0$ et finalement $\dfrac{\|B_{n,k+1}\|_\infty}{\|B_{n,k}\|_\infty}\leqslant 1$.

La suite des valeurs $\|B_{n,k}\|_\infty$, pour $1\leqslant k\leqslant E(n/2)$, est décroissante, et par symétrie elle est croissante pour $E(n/2)+1\leqslant k\leqslant n-1$. La valeur maximale est donc bien $\|B_{n,1}\|_\infty = \|B_{n,n-1}\|_\infty$ soit $\alpha_n = (1-\dfrac{1}{n})^{n-1}$.

Sujet 3(2016 794 Centrale PSI)

Soit $g\colon x\in\,]0,1]\mapsto x^x$.

1) Prolonger g par continuité en 0.

2) Représenter graphiquement g. Justifier l'allure de g au voisinage de 0. Déterminer les coordonnées du minimum.

3) Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ à 10^{-2} près.

4) Exprimer I à l'aide d'une série faisant intervenir les intégrales $\displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

5) Calculer $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ pour $n\in\{0,\dots,10\}$. Admettre le résultat constaté.

6) Indiquer alors comment calculer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ avec une précision quelconque.

Solution :

1) Pour tout $x\in]0;1]$, on a $g(x)=e^{x\ln x}$, et comme $x\ln x\to 0$ quand $x\to 0$ par croissances comparées, il vient $g(x)\to 1$ quand $x\to 0$.

2)

```
>>> import math as ma
>>> def g(x):
        if x = = 0:
            return 1
        else:
            return ma.exp(x*ma.log(x))
```

```
>>> X = [k/100 for k in range(101)]
>>> Y = [g(x) for x in X]
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> plt.plot(X, Y)
>>> plt.show()
```

La fonction g ainsi prolongée est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1]$ avec $\forall x>0$, $g'(x)=(\ln x+1)x^x$ donc $g'(x)\to-\infty$ quand $x\to 0$. Le théorème de limite de la dérivée prouve que $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}\to-\infty$ quand $x\to 0$, d'où à l'origine une demi-tangente verticale.

Et le minimum correspond à la valeur de x telle que $g'(x)=0$, soit $x=1/e$, et alors $g(x)=e^{-1/e}$.

3) Énoncé ambigü. Les commandes `import scipy.integrate as scint` puis `scint.quad(g, 0, 1)` donnent $I\sim 0.78$.

Attend-on la programmation d'une méthode des rectangle ou des trapèzes en contrôlant l'erreur ?

4) Utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a

$$I=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Comme la fonction $x\mapsto x\ln x$ est bornée sur $]0;1]$ (elle se prolonge par continuité en 0, on peut appliquer le théorème de compacité au prolongement) et comme la série entière définissant la fonction exponentielle converge uniformément sur tout compact, on en déduit que la série de fonctions à intégrer converge uniformément sur $[0;1]$ (on les prolonge par continuité en 0).

Le théorème de convergence uniforme sur un segment permet d'écrire

$$I=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(x\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x.$$

5)

```
>>> liste = []
>>> for n in range(11):
        f = lambda x:(x*ma.log(x))**n
        I = scint.quad(f, 0, 1)[0]
        I = I*(n + 1)**(n + 1)/ma.factorial(n)
        liste.append(I)
>>> liste
```

On obtient manifestement $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1(x\ln x)^n\,\mathrm{d}x=(-1)^n$, ce qui se démontre par n intégrations par parties successives.

6) Il vient $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$. La série qui apparaît vérifie clairement les hypothèses du critère spécial des séries alternées, on peut donc majorer ses restes par

$$|R_n|=\left|\sum_{k=n+1}+\infty\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\right|\leqslant\frac{1}{(n+2)^{n+2}}.$$

Pour $\varepsilon>0$ une précision fixée, il suffit donc de trouver n tel que $\dfrac{1}{(n+2)^{n+2}}\leqslant\varepsilon$ pour avoir $|I-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}|\leqslant\varepsilon$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$ est une valeur approchée de I à la précision ε.

Sujet 4(2016 814 Centrale PC)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $\rho_i(A) = |a_{i,i}| - \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. On dit que A est à diagonale strictement dominante si, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\rho_i(A) > 0$.

1) Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Soit $X = (x_1,\dots,x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = 0$. Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

Montrer que $|a_{i_0,i_0}| \times |x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$. En déduire que A est inversible.

2) Que dire de la réciproque ?

3) Écrire une fonction qui à une matrice A associe $\rho_1(A) \times \cdots \times \rho_n(A)$.

4) Comparer $\rho_1(A) \times \cdots \times \rho_n(A)$ et $|\det A|$. Conjecture ?

5) Démontrer la conjecture précédente.

Solution :

1) Comme $AX = 0$, la composante numéro i_0 de ce vecteur est nulle, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0$, donc $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j$. L'inégalité triangulaire et l'hypothèse de maximalité de $|x_{i_0}|$ mènent alors à

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|,$$

donc $\rho_{i_0}(A)|x_{i_0}| \leqslant 0$. Comme $\rho_{i_0}(A)$ est strictement positif, cela implique que $x_{i_0} = 0$. Par maximalité de $|x_{i_0}|$, toutes les composantes de X sont nulles, donc le noyau de A est réduit au vecteur nul, donc A est inversible.

2) La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la matrice antidiagonale inversible (et qui n'est pas à diagonale strictement dominante) suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut généraliser ce contre-exemple à une matrice carrée d'ordre quelconque.

3) On commence par écrire une fonction `rho(A, i)` qui calcule $\rho_i(A)$, puis une fonction, appelée `Rho(A)`, qui effectue le produit des $\rho_i(A)$:

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def rho(A, i):
    n = len(A)
    s = 0
    for j in range(n):
        s = s + abs(A[i, j])
    s = 2*abs(A[i, i]) - s
    return(s)

def Rho(A):
    n = len(A)
    p = 1
    for i in range(n):
```

```
        p = p*rho(A, i)
    return(p)

M = np.array([[3, 1, - 1], [2, 5, -1], [-1, -4, -6]])
print(Rho(M))
```

Le résultat de la dernière commande est 2, comme on peut le vérifier par un calcul mental élémentaire. On note que `Rho(A)` est définie pour toutes les matrices carrées complexes : c'est à l'utilisateur de veiller à l'employer pour des matrices à diagonale strictement dominante.

4) On effectue la différence $|\det(A)| - \prod_{i=1}^{n} \rho_i(A)$ pour plusieurs matrices à diagonale strictement dominante, dont une matrice diagonale :

```
import numpy.linalg as alg

N = np.diag([2, 3, -4])
O = np.array([[-3, 1, 0], [1, -2, 0], [5, 6, -12]])
print(abs(alg.det(M)) - Rho(M))
print(abs(alg.det(N)) - Rho(N))
print(abs(alg.det(O)) - Rho(O))
```

On obtient 84, 0 et 58. D'autres expérimentations suggèrent que $\prod_{i=1}^{n} \rho_i(A)$ est majoré par $|\det A|$ pour toute matrice à diagonale strictement dominante.

5) On pose

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\rho_1(A)}, \cdots, \frac{1}{\rho_n(A)}\right) \quad \text{et} \quad B = DA.$$

Ainsi, la matrice B est obtenue en divisant la ligne i de A par le nombre $\rho_i(A)$, non nul car strictement positif, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On note $b_{i,j}$ les coefficients de la matrice B, et on constate que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \rho_i(B) = |b_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |b_{i,j}| = \frac{1}{\rho_i(A)} \left(|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right) = 1.$$

Soient λ une valeur propre complexe de B, et $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ un vecteur propre associé. On note i un indice tel que $|x_i| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$. Comme X est un vecteur propre, on a $x_i \neq 0$ et, quitte à diviser par x_i, on peut supposer que $x_i = 1$ et que $|x_j| \leqslant 1$ pour tout $j \neq i$. La i-ème composante de l'égalité $BX = \lambda X$ s'écrit alors

$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = \lambda x_i \quad \text{ou encore} \quad b_{i,i} + \sum_{j \neq i} b_{i,j} x_j = \lambda.$$

L'inégalité triangulaire et la majoration $\forall j \neq i$, $|x_j| \leqslant 1$ entraînent alors que

$$|\lambda| \geqslant |b_{i,i}| - \left| \sum_{j \neq i} b_{i,j} x_j \right| \geqslant |b_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|\, |x_j| \geqslant |b_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |b_{i,j}| = \rho_i(B) = 1.$$

On a donc démontré que toutes les valeurs propres de B sont de module au moins 1, et on en déduit que

$$|\det B| = \left| \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)} \lambda^{m_\lambda} \right| \geqslant 1.$$

Par multilinéarité du déterminant par rapport aux lignes, on a $\det B = \dfrac{\det A}{\rho_1(A)\cdots\rho_n(A)}$, et l'inégalité ci-dessus fournit la majoration attendue :

$$\rho_1(A)\times\cdots\times\rho_n(A)\leqslant|\det A|.$$

Sujet 5(2018 1191 Centrale PC)

1) Soit

$$M=\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\ \frac14&\frac13&\frac16\\ \frac14&\frac14&\frac14\end{pmatrix}.$$

- **a)** Afficher les trente premières puissances de M.
- **b)** Afficher les valeurs propres des trente premières puissances de M.
- **c)** Que peut-on raisonnablement conjecturer ?

2) Soient $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ et $V=(a_i^{j-1})_{\leqslant i,j\leqslant n}$. On suppose les a_i distincts. Montrer que V est inversible.

3) Soient $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et $D=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$. On suppose que $A^n\to 0$. Montrer que le spectre de A est inclus dans D.

4) Soient a, b, c dans $\mathbb{C}$ distincts. On suppose que $a^n+b^n+c^n\to 0$. Montrer que a, b et c sont dans D.

5) Montrer que si $\mathrm{Tr}\,(A^n)\to 0$ alors le spectre de A est inclus dans D.

Solution :

1) La première et la dernière ligne de M étant proportionnelles, on sait déjà que $0\in\mathrm{Sp}(M)$. On exécute les lignes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

M = np.array([[1/3, 1/3, 1/3], [1/4, 1/3, 1/6], [1/4, 1/4, 1/4]])
for n in range(30):
    P = alg.matrix_power(M, n)
    print(P)
    print([n, alg.eigvals(P)])
```

Les valeurs propres de M sont données par `[-5.55111512e - 17, 8.33333333e-01, 8.33333333e-02]`, et on interprète cela comme

$$\mathrm{Sp}(M)=\left\{0,\frac{1}{10}\left(8+\frac13\right),\frac{1}{100}\left(8+\frac13\right)\right\}=\left\{0,\frac56,\frac{1}{12}\right\},$$

ce que confirmerait un calcul exact du polynôme caractéristique :

$$\chi_M=X\left(X^2-\frac{11}{12}X+\frac{5}{72}\right).$$

Ces valeurs propres, disons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, sont de module strictement plus petit que 1, donc les valeurs propres de M^n, qui sont $\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n$, tendent vers zéro quand n tend vers l'infini. On le constate plus ou moins avec Python, car les problèmes d'instabilité numérique faussent les résultats.

2) C'est un résultat qui figure explicitement dans le cours puisque la valeur du déterminant de Vandermonde est

$$\det(V) = \det\left((a_i^{j-1})_{\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

Si les a_i sont deux à deux distincts, ce déterminant est non nul, donc V est inversible.

3) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres complexes de A répétées avec leur ordre de multiplicité. Comme A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{T}_p^{\mathrm{sup}}(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$. Les éléments diagonaux de T sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de A, et un calcul très classique montre que les termes diagonaux de T^n sont $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n$. Comme $T = P^{-1}AP$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = P^{-1}A^nP.$$

L'application $\varphi\colon N \mapsto P^{-1}NP$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, donc est continue. Comme la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, il en est de même de la suite image $(\varphi(A^n))_{n\in\mathbb{N}} = (T^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour traduire cette limite, le cours dit qu'on peut choisir n'importe quelle norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, par exemple la norme infinie $\|M\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}|m_{i,j}|$. La convergence de la suite (T_n) vers zéro entraîne que chaque suite d'éléments de T_n d'une position (i,j) fixée converge vers zéro, et c'est en particulier le cas pour ses termes diagonaux :

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad \lim_{n\to+\infty}\lambda_k^n = 0.$$

Or la suite géométrique complexe de terme général λ^n converge vers zéro si et seulement si $|\lambda| < 1$. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset D.$$

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n + b^n + c^n$, et on note X_n et U_n les vecteurs colonnes suivants, et V la matrice de Vandermonde du triplet (a,b,c) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} a^n \\ b^n \\ c^n \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

On peut alors écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a^n & + & b^n & + & c^n & = & u_n \\ a^{n+1} & + & b^{n+1} & + & c^{n+1} & = & u_{n+1} \\ a^{n+2} & + & b^{n+2} & + & c^{n+2} & = & u_{n+2}, \end{cases} \quad \text{donc} \quad VX_n = U_n.$$

Comme V est inversible, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = V^{-1}U_n$. Comme (u_n) converge vers zéro par hypothèse, il en est de même de la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et comme la matrice V^{-1} est indépendante de n et que l'application $U \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{C}) \mapsto V^{-1}U$ est continue, on en déduit que la suite $(V^{-1}U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, donc que les trois suites de termes généraux a^n, b^n et c^n convergent vers zéro, donc que

$$(a,b,c) \in D^3.$$

5) Il faut adapter légèrement la question précédente, en tenant compte du fait que les valeurs propres peuvent être multiples. On modifie alors les notations de la question (c) : on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes *deux à deux distinctes* de A, et par $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. L'hypothèse est donc que

$$\mathrm{Tr}\,(A^n) = m_1\lambda_1^n + \cdots + m_r\lambda_r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note X_n (respectivement U_n) le vecteur colonne de composantes $m_k\lambda_k^n$ (respectivement $\mathrm{Tr}\,(A^{n+k-1})$) pour $k \in [\![1,r]\!]$. Si V est la matrice de Vandermonde associée au r-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, on a encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad VX_n = U_n,$$

Comme V est inversible, on conclut comme précédemment que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset D.$$

Sujet 6(2016 829 Centrale PC)

Soit (E_n) l'équation $x^n = e^x$, pour $n \geqslant 3$.

1) **a)** Montrer que (E_n) possède une unique solution x_n dans $[0, n]$.

b) Calculer quelques termes et conjecturer le comportement de (x_n).

c) Conjecturer que $x_n = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$.

d) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

2) Montrer que (E_n) possède une unique solution $y_n \in [n, +\infty[$. Déterminer un développement asymptotique de y_n.

Solution : Pour $n = 0$, l'équation $1 = e^x$ possède une seule solution. On suppose $n \geqslant 1$.

1) **a)** L'équation (E_n) est équivalente à $f(x) = \dfrac{1}{n}$, où

$$f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln x}{x}\cdot$$

Une étude rapide de f [avec $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$] donne le tableau de variation suivant :

x	0	1	e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Pour $n = 1$ ou 2, l'équation $x^n = e^x$ n'a donc pas de solution. En revanche, si $n \geqslant 3$, de sorte que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède deux solutions x_n et y_n vérifiant l'encadrement :

$$1 < x_n < e < y_n.$$

On suppose $n \geqslant 3$ jusqu'à la fin de l'exercice.

b) On programme une méthode de dichotomie avec précision fixée, qui calcule *une racine* de h sur $[a, b]$ lorsqu'on sait que h est continue et vérifie $h(a)h(b) < 0$. Si h est, de plus, strictement monotone, cette méthode donne *l'unique racine* de h sur $[a, b]$ (c'est le cas ici de f_n sur $[1, e]$).

```
def dichotomie(h, a, b, precision):
    while b - a>precision:
        m = (a + b)/2
        if h(a)*h(m) < = 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a
```

On définit aussi f ainsi que la fonction `petiteracine(n, precision)` qui renverra x_n grâce à une définition locale de la fonction $f - \dfrac{1}{n}$.

```
def f(x):
    return(log(x)/x)
def petiteracine(n, precision):
    def h(x):
        return(f(x) - 1/n)
    return(dichotomie(h, 1,exp(1), precision))
```

Voici les résultats obtenus, à la précision choisie de 10^{-3} (et par défaut) :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	100
x_n	1.856	1.429	1.294	1.226	1.183	1.154	1.133	1.118	1.010

On conjecture que la suite (x_n) décroît et converge vers 1.

c) Le calcul de $n(x_n - 1)$ pour $n = 1000, 2000, \dots, 10000$, grâce à

```
for k in range(1, 11):
    print(1000*k*(petiteracine(1000*k, 10**(-6)) - 1))
```

renvoie des nombres compris entre $1,001$ et $0,995$: on ne se mouille pas trop en conjecturant que $a = 1$.

Le calcul de $n^2(x_n - 1 - \dfrac{1}{n})$ pour $n = 1000, 2000, \dots, 10000$, grâce à

```
for k in range(1, 11):
    print((1000*k)**2*(petiteracine(1000*k, 10**(-10)) - 1 - 1/(1000*k)))
```

renvoie des nombres compris entre $1,502$ et $1,496$: on ne se mouille pas trop en conjecturant que $b = \dfrac{3}{2}$.

d) On note g la restriction de f à $]0, e[$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est strictement monotone. De plus, $g'(x) = f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \neq 0$ pour tout $x \in]0, e[$, donc g réalise un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme sur son image, qui est $]-\infty, \dfrac{1}{e}[$. Comme g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de zéro, la suite de terme général $x_n = g^{-1}(\dfrac{1}{n})$ admet un développement asymptotique à tout ordre en la variable $\dfrac{1}{n}$, donné par la formule de Taylor-Young pour g^{-1} en zéro. En particulier

$$x_n = g^{-1}(0) + \frac{(g^{-1})'(0)}{n} + \frac{(g^{-1})''(0)}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

avec $a = (g^{-1})'(0)$ et $b = (g^{-1})''(0)/2$. Or $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \dfrac{1}{f'(g^{-1}(x))}$, donc

$$a = \frac{1}{f'(1)} = 1.$$

On calcule ensuite $f''(x) = -\dfrac{1}{x^3} - 2\dfrac{1 - \ln x}{x^3} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$ et $(g^{-1})''(x) = -\dfrac{f''(g^{-1}(x))}{(f'(g^{-1}(x)))^3}$, donc

$$b = -\frac{f''(1)}{2(f'(1))^3} = \frac{3}{2}.$$

2) Voir la question (a)i pour l'existence et l'unicité de l'unique solution $y_n \in [n, +\infty[$ de (E_n). Comme $f(n) = \dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$ et $f(n^2) = \dfrac{2\ln n}{n^2} < \dfrac{1}{n}$, on peut affirmer que

$$n < y_n < n^2,$$

On écrit ensuite la relation $f(y_n) = \dfrac{1}{n}$ sous la forme $y_n = n \ln y_n$, et on itère cette relation, ce qui donne $y_n = n\ln(n \ln y_n) = n\ln n + n \ln\ln y_n$. Comme $y_n < n^2$, on a $0 < n\ln(\ln y_n) < n\ln(2\ln n)$, qui est négligeable devant $n \ln n$. On vient donc de trouver un équivalent de y_n :

$$y_n \sim n \ln n.$$

Pour aller plus loin, on itère la relation de définition de y_n sous la forme $y_n = n\ln n + n\ln(\ln(n\ln y_n)) = n\ln n + n\ln(\ln n + \ln\ln y_n)$. De $y_n \sim n\ln n$, on déduit que $\ln\ln y_n \sim \ln\ln n$, puis que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} y_n &= n\ln n + n\ln\left(\ln n\left[1+\frac{\ln(\ln y_n)}{\ln n}\right]\right) = n\ln n + n\ln(\ln n) + \ln\left[1+\frac{\ln(\ln y_n)}{\ln n}\right] \\ &= n\ln n + n\ln(\ln n) + \mathrm{o}(n\ln(\ln n)). \end{aligned}$$

On pourrait poursuivre les calculs en utilisant les mêmes idées.

Sujet 7(2016 830 Centrale PC)

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $\langle x\rangle = x - \lfloor x\rfloor$. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est équirépartie modulo 1 si, pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$, on a $c_n(a,b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b-a$, où $c_n(a,b) = \dfrac{1}{n}\mathrm{Card}\{k \in \{1,\dots,n\},\ \langle u_k\rangle \in [a,b]\}$.

1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

- **a)** Déterminer l'ensemble des suites (w_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$.
- **b)** En déduire l'existence d'une suite (v_n) de limite nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n \in \mathbb{N}$.
- **c)** Montrer que (u_n) n'est pas équirépartie modulo 1.

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.

- **a)** Écrire un programme permettant de calculant $c_n(a,b)$.
- **b)** Afficher les 50 premiers termes pour $a = 0$ et $b = 0,5$. Conjecture ?

3) Faire le même type d'étude pour $u_n = \ln(n)$.

4) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est équirépartie modulo 1.

Solution : L'énoncé complet est disponible sur le site du concours.

1) **a)** L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $w_{n+2} - w_{n+1} - w_n = 0$ est $z^2 - z - 1 = 0$. Ses solutions complexes sont en fait réelles et valent $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Le cours affirme alors que les suites (réelles) cherchées sont celles qui vérifient

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ et $w_n = u_n + v_n$. La raison $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ appartient à $]-1,0[$ car $2 < \sqrt{5} < 3$, donc (v_n) est une suite (géométrique) de limite nulle.
Par ailleurs, (w_n) est solution de l'équation étudiée à la question précédente, et il suffit manifestement que ses deux premiers termes soient des entiers naturels pour qu'elle soit à valeurs dans $\mathbb{N}$ (récurrence immédiate à partir de l'égalité $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$). Les deux calculs suivants achèvent la preuve :

$$w_0 = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad w_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \in \mathbb{N}.$$

c) On pose $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{3}{4}$. Comme $\lim v_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|v_n| < \dfrac{1}{4}$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, en utilisant la propriété $\forall (k,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $\lfloor k+x \rfloor = k + \lfloor x \rfloor$ de la partie entière, on obtient

$$\langle u_n \rangle = u_n - \lfloor u_n + v_n - v_n \rfloor = -v_n - \lfloor -v_n \rfloor = \begin{cases} 1 - v_n \in]\frac{3}{4}, 1] & \text{si } v_n \geqslant 0 \\ -v_n \in]0, \frac{1}{4}[& \text{si } v_n < 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, $\langle u_n \rangle \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ dès que $n \geqslant n_0$, et par conséquent, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant c_n(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \leqslant \dfrac{n_0}{n}$, donc $\lim c_n(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 0 \neq \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$. La suite (u_n) n'est pas équirépartie modulo 1.

2) **a)** On suppose que la suite (u_n) est donnée par une fonction f d'une variable réelle : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = f(n)$.

```
def c(a, b, n, f):
    compteur = 0
    for k in range(1, n + 1):
        uu = f(k) - floor(f(k))
        if a < = uu and uu < = b:
            compteur = compteur+1
    return(compteur)
```

b) L'interprétation des résultats de

```
for n in range(1,51):
    print(c(0, 0.5, n, sqrt)/n)
```

n'est pas évidente du tout : le quotient $\dfrac{c_n(0, 0.5)}{n}$ se rapproche de $\dfrac{1}{2}$ par valeurs supérieures, mais oscille beaucoup. Si on remplace les 50 premiers quotients par les termes d'indice multiple de 1000 jusqu'à 100 000, c'est plus clair, et on conjecture que la suite $(\sqrt{n})$ est équirépartie.

3) Cette fois, on observe une oscillation entre 0, 38 et 0, 62 quand on lance ce qui semble indiquer que la suite $(\ln n)$ n'est pas équirépartie.

4) Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A < B$. Si l'on note $p, p+1, \ldots, p+j-1$ les entiers appartenant à $[A, B]$, on a $A + j - 1 \leqslant p + j - 1 \leqslant B$, donc $j \leqslant B - A + 1$, et $B < p + j < A + 1 + j$, donc $B - A - 1 < j$. En résumé, le nombre j d'entiers appartenant à $[A, B]$ vérifie

$$B - A - 1 < j \leqslant B - A + 1.$$

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in [0, 1]^2$ tels que $a < b$. Comme $m + a \leqslant \sqrt{k} \leqslant m + b$ équivaut à $(m+a)^2 \leqslant k \leqslant (m+b)^2$, le nombre j_m d'entiers k satisfaisant $m + a \leqslant \sqrt{k} \leqslant m + b$ vérifie

$$2(b-a)m + b^2 - a^2 - 1 < j_m \leqslant 2(b-a)m + b^2 - a^2 + 1.$$

L'ensemble des $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\langle \sqrt{k} \rangle \in [a, b]$ admet la partition en la réunion des blocs complets

$$U_m = \{k \in \mathbb{N},\ m + a \leqslant \sqrt{k} \leqslant m + b\} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant m \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$$

et du bloc éventuellement incomplet $\{k \in \{1, \ldots, n\},\ \lfloor \sqrt{n} \rfloor + a \leqslant \sqrt{k} \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor + b\}$: on ne sait pas qui, de $\sqrt{n}$ ou de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + b$, est le plus grand. On en déduit l'encadrement

$$j_1 + \cdots + j_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1} \leqslant c_n(a, b) \leqslant j_1 + \cdots + j_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}.$$

En posant $\alpha = b^2 - a^2 - 1$ et en utilisant l'encadrement de j_m calculé plus haut, on trouve

$$(b-a)\lfloor \sqrt{n} \rfloor \big(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1\big) + \alpha \big(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1\big) \leqslant c_n(a, b) \leqslant (b-a)\lfloor \sqrt{n} \rfloor \big(\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1\big) + (\alpha + 2)\lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Le majorant et le minorant de cet encadrement étant équivalents à $(b-a)n$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim \dfrac{c_n(a,b)}{n} = b-a$, donc que la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est équirépartie modulo 1.

Remarque. — La suite $(\ln n)$ n'est pas équirépartie et en voici la preuve. On commence par évaluer le nombre j_m d'entiers k tels que $m \leqslant \ln k \leqslant m+\dfrac{1}{2}$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$ donné. Comme ci-dessus, on a $e^{m+1/2} - e^m - 1 < j_m \leqslant e^{m+1/2} - e^m + 1$ et, si l'on pose $\alpha = e^{1/2} - 1$, cet encadrement s'écrit

$$\alpha e^m - 1 < j_m \leqslant \alpha e^m + 1.$$

Comme ci-dessus, on a l'encadrement $j_1 + \cdots + j_{\lfloor \ln n \rfloor - 1} \leqslant c_N(0, \frac{1}{2}) \leqslant j_1 + \cdots + j_{\lfloor \ln n \rfloor}$, qui s'écrit aussi

$$m_n := \alpha \frac{e^{\lfloor \ln n \rfloor} - e}{e-1} - \lfloor \ln n \rfloor \leqslant c_n\left(0, \frac{1}{2}\right) \leqslant M_n := \alpha \frac{e^{\lfloor \ln n \rfloor + 1} - e}{e-1} + \lfloor \ln n \rfloor$$

Si $n = n_p := \lfloor e^p \rfloor$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on a $e^{p-1} < n < e^p$, donc $p-1 < \ln n < p$, donc $\lfloor \ln n \rfloor = p-1$, et le majorant M_{n_p} vérifie $M_{n_p} \sim \dfrac{\alpha e^p}{e-1} \sim \beta n_p$, où l'on a posé $\beta = \dfrac{\alpha}{e-1}$. En supposant que la suite $(\ln n)$ est équirépartie, on en déduirait que $\dfrac{1}{2} \leqslant \beta = \dfrac{e^{1/2}-1}{e-1}$. C'est faux : la commande `print((exp(1/2) - 1)/(exp(1) - 1))` renvoie 0.38.

Sujet 8 (2016 841 Centrale PC)

Soient $S_1 \colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^{2n})$, $S_2 \colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^{2n-1})$ et $S_3 \colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^{2n-1})$.

1) Déterminer les domaines de définition de S_1, S_2, S_3.

2) Tracer les graphes de sommes partielles pour diverses valeurs de n.

3) Tracer les graphes de sommes partielles de $S_1 + S_2 + S_3$. Conjecture ?

4) Montrer que S_1, S_2, S_3 sont de classe $\mathscr{C}^1$.

5) Montrer la conjecture.

Solution :

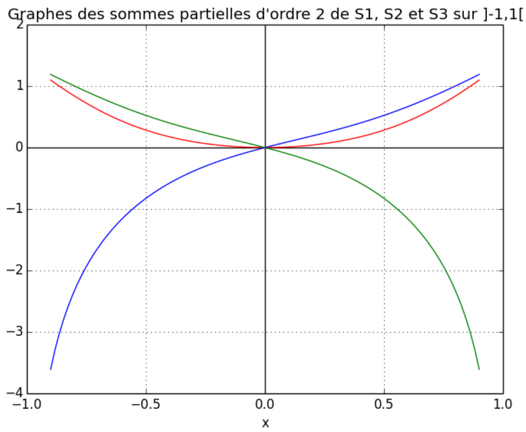
1) Si $|x| < 1$ est fixé, les trois termes généraux des séries étudiées sont équivalents à des termes généraux de séries géométriques de raison x ou x^2, donc les trois séries convergent absolument, donc convergent. Si $|x| \geqslant 1$, la première série est grossièrement divergente, et les deux autres sont soit grossièrement divergentes, soit ne sont même pas définies. En conclusion, les domaines de définition de S_1, S_2, S_3 sont les mêmes et valent $]-1, 1[$.

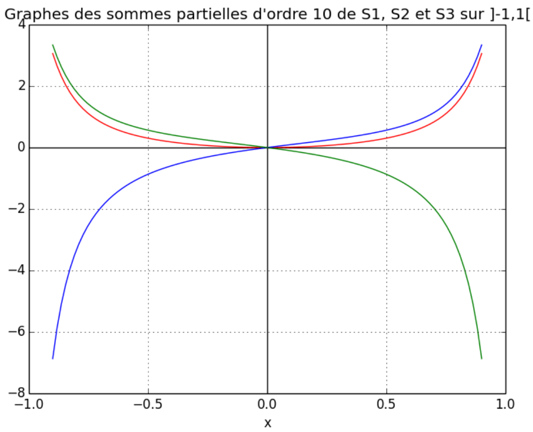
2) Voici les fonctions utilisées pour cette question et la suivante.

```
def S1(n, x):
    resultat = 0
    for k in range(1, n + 1):
        resultat = resultat +log(1 + x**(2*k))
    return(resultat)

def S2(n, x):
    resultat = 0
    for k in range(1, n + 1):
        resultat = resultat +log(1 + x**(2*k - 1))
    return(resultat)
```

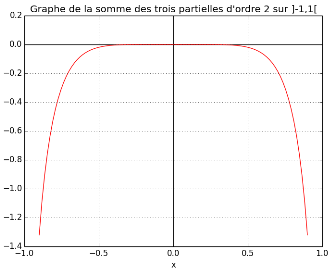
```
def S3(n, x):
    resultat = 0
    for k in range(1, n + 1):
        resultat = resultat +log(1 - x**(2*k + 1))
    return(resultat)

def S(n, x):
    return(S1(n, x)+S2(n, x)+S3(n, x))

def trace_sommes_partielles(n):
    x = linspace(-0.9, 0.9, 100)
    y1 = S1(n, x)
    y2 = S2(n, x)
    y3 = S3(n, x)
    grid()
    title("Graphes des sommes partielles d'ordre "+ str(n)+" de S1, S2 et S3 sur ]-1, 1[")
    xlabel("x")
    axhline(color = "black")
    axvline(color = "black")
    plot(x, y1, color = "red")
    plot(x, y2, color = "blue")
    plot(x, y3, color = "green")
    show()

def trace_somme_des_trois_sommes_partielles(n):
    x = linspace(-0.9, 0.9, 100)
    y = S(n, x)
    grid()
    title("Graphe de la somme des trois partielles d'ordre "+ str(n)+" sur ]-1, 1[")
    xlabel("x")
    axhline(color = "black")
    axvline(color = "black")
    plot(x, y, color = "red")
    show()
```

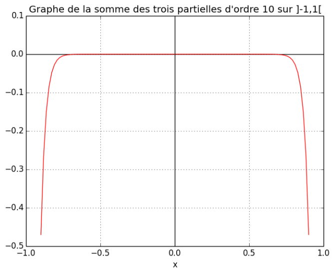
Voici les graphes des sommes partielles d'ordre 2 et 10, tracés en fait sur l'intervalle $[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}]$:

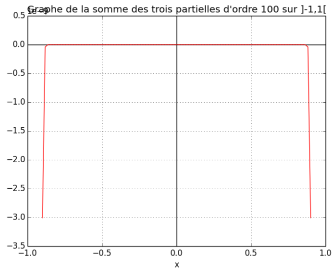




3) Et voici les graphes de la somme des trois sommes partielles d'ordre 2, 10 et 100 :







On conjecture que $S_1+S_2+S_3$ est identiquement nulle sur $]-1,1[$.

4) On pose $u_n\colon x\in]-1,1[\mapsto \ln(1+x^{2n})$, $v_n\colon x\in]-1,1[\mapsto \ln(1+x^{2n-1})$, $w_n\colon x\in]-1,1[\mapsto \ln(1-x^{2n-1})$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall x\in]-1,1[,\quad u_n'(x)=\frac{2nx^{2n-1}}{1+x^{2n}},\quad v_n'(x)=\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{1+x^{2n-1}},\quad w_n'(x)=-\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{1-x^{2n-1}}.$$

Soit $a\in[0,1[$. La norme uniforme commune aux fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ sur $[-a,a]$ est $K:=\dfrac{1}{1-a}$. Comme $x\in[-a,a]$ implique $\{x^{2n},x^{2n-1},-x^{2n-1}\}\subset[-a,a]$, on en déduit que

$$\|u_n'\|_\infty^{[-a,a]}\leqslant 2na^{2n-1},\quad \|v_n'\|_\infty^{[-a,a]}\leqslant(2n-1)Ka^{2n-2},\quad \|w_n'\|_\infty^{[-a,a]}\leqslant(2n-1)Ka^{2n-2}.$$

Les théorèmes de croissance comparées montrent alors que les trois séries dérivées $\sum u_n'$, $\sum v_n'$ et $\sum w_n'$ convergent normalement sur $[-a,a]$. Comme la convergence simple des trois séries elles-mêmes sur $]-1,1[$ a été prouvée à la question précédente, on déduit du théorème de dérivation que S_1, S_2 et S_3 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, et que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad S_1'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{1+x^{2n}},\quad S_2'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{1+x^{2n-1}},\quad S_3'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{1-x^{2n-1}}.$$

5) On pose $S=S_1+S_2+S_3$. Soit $x\in]-1,1[$. Dans la somme $S(x)$, on regroupe les termes provenant de $S_2(x)$ et $S_3(x)$, en profitant de ce que $(1-x^{2n-1})(1-x^{2n+1})=1-x^{4n-2}$:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{2n})+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-x^{4n-2}).$$

On sépare ensuite, dans la première somme, les termes d'indice pair de ceux d'indice impair : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{2n})=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{4n})+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{4n-2})$. Cette séparation est légitime car les deux séries qu'on vient d'écrire convergent, et elle permet le regroupement des termes $\ln(1+x^{4n-2})$ et $\ln(1-x^{4n-2})$:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{4n})+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-x^{8n-4}).$$

On a alors l'idée de démontrer par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad S(x)=\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+x^{2^pn}\right)}_{u_p(x)}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-x^{2^p(2n-1)}\right)}_{v_p(x)}.\qquad(\mathscr{H}_p)$$

Les propriétés $(\mathscr{H}_1)$ et $(\mathscr{H}_2)$ ont été établies plus haut. Si $(\mathscr{H}_p)$ est vraie, alors, en séparant les termes pour n pair de ceux pour n impair dans la première somme, puis en regroupant ces derniers avec ceux de la seconde somme, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+x^{2^{p+1}n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+x^{2^p(2n-1)}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-x^{2^p(2n-1)}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+x^{2^{p+1}n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-x^{2^{p+1}(2n-1)}\right) = u_{p+1}(x) + v_{p+1}(x).\end{aligned}$$

C'est bien la propriété $(\mathscr{H}_{p+1})$. Il convient de noter que le membre de gauche, $S(x)$, est indépendant de p. On va alors montrer que $S(x) = 0$ en fixant $x \in]-1,1[$, et en faisant varier p.
Comme l'exposant $2^p n$ est pair, $x^{2^p n}$ est positif, donc on peut lui appliquer l'encadrement $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \ln(1+y) \leqslant y$. On obtient alors

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+x^{2^p n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2^p n} = \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^p}}.$$

Comme le majorant tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$, on a déjà prouvé que la suite $(u_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro. On ne dispose pas d'inégalités aussi efficaces pour établir la convergence de la suite $(v_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$, mais on va se contenter d'appliquer l'équivalent $\ln(1+y) \sim y$ en zéro. On en déduit l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall y \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0],\ |\ln(1+y)| \leqslant \dfrac{3}{2}|y|$. Comme on dispose de la majoration *uniforme en* n suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|-x^{2^p(2n-1)}\right| \leqslant x^{2^p},$$

et comme x^{2^p} tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\ln(1-x^{2^p(2n-1)})| \leqslant \dfrac{3}{2}x^{2^p(2n-1)}$. Par suite,

$$\forall p \geqslant p_0, \quad |v_p(x)| \leqslant \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2^p(2n-1)} = \frac{3}{2}\,\frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}.$$

Cela prouve que la suite $(v_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro et, finalement, que $S(x) = 0$, pour tout $x \in]-1,1[$. La conjecture est prouvée. On remarque pour terminer que, comme l'indiquent les graphes de la question 3, la convergence de $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction nulle ne semble pas uniforme sur $]-1,1[$.

SUJET 9(2018 1208 Centrale PC)

Soit S l'ensemble des suites définies par la relation $u_n = \ln(n)u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

1) Écrire un script permettant de calculer les premiers termes de u.

2) Soit $(a_n) \in S$ obtenue en prenant $(a_0 = 1, a_1 = 0)$ et $(b_n) \in S$ obtenue en prenant $(b_0 = 0, b_1 = 1)$. Conjecturer la limite des suites (a_n) et (b_n). Le prouver.

3) On pose $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ pour $n \geqslant 1$. Écrire un script permettant de calculer (x_n).

4) Tracer le graphe de la suite (x_n). Conjecturer son comportement en l'infini. Le prouver.

5) On pose $d_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$. Exprimer d_n en fonction de n.

6) En déduire la limite de (x_n).

Solution :

1) On valide `import numpy as np` puis

```
def suite(u0, u1, N):    # calcule les termes pour 0 < = n < = N
    L = [0]*(N  + 1)
    L[0], L[1] = u0, u1
    for n in range(2, N + 1):
        L[n] = np.log(n)*L[n - 1] + L[n - 2]
    return L
```

2) Pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ en croissant.

On prouve par récurrence que si $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 \geqslant 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant 0$. Ensuite, par récurrence

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \geqslant (\ln 3)^{n-2} u_2.$$

Or $a_2 = 1$ et $b_2 = \ln 2$ sont strictement positifs, d'où le résultat.

3) On met dans la liste x les réels $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$

```
N = 50
a, b = suite(1, 0, N), suite(0, 1, N)
x = []
    for n in range(1, N + 1):
        x.append(a[n]/b[n])
```

4) Le script demandé est `{plt.plot(list(range(1, N + 1)), q, color = 'red')`. Il semble que

$$\lim x_n = \ell \approx 0.76596004904.$$

5) On pose $d_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$. Il vient pour $n \geqslant 2$

$$d_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln(n+1)a_n + a_{n-1} & a_n \\ \ln(n+1)b_n + b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = -d_n$$

donc

$$d_n = (-1)^n d_1 = (-1)^n \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \ln 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n.$$

6) On remarque que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_n + 1}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{d_n}{b_{n+1}b_n} = \frac{(-1)^n}{b_{n+1}b_n}.$$

Or si $n \geqslant 3$, $b_n = \ln(n)b_{n-1} + b_{n-2} \geqslant \ln(n)b_{n-1} \geqslant b_{n-1}$ donc, par le théorème des séries alternées, $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge.

7) Il s'ensuit que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ existe et vaut

$$\ell = \ell - x_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{b_{n+1}b_n}.$$

Sujet 10(2017 1057 Centrale PSI)

1) On considère l'équation $(E) : (1 - x)y'' = y$ sur $]-\infty, 1[$.

- **a)** Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
- **b)** Représenter graphiquement f sur $[-2; 0,95]$.

2) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$, $a_n = \dfrac{n-2}{n}a_{n-1} + \dfrac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$.

- **a)** Représenter graphiquement a_n pour $n \in \{0, \dots, 100\}$.
- **b)** Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
- **c)** Représenter graphiquement $s\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sur $[-1,1; 0,95]$. Que constate-t-on ? Démontrer le résultat.

Sujet 11(2016 860 Centrale PC)

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Le premier joueur tire des boules de l'urne sans remise. Il s'arrête lorsqu'il obtient la boule portant le numéro n. On note X_1 le nombre de tirages effectués par le premier joueur. Le deuxième joueur effectue des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule de numéro maximal restant dans l'urne. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le deuxième joueur. On pose $X_2 = 0$ si $X_1 = n$.

1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1.

2) Déterminer $P(X_2 = k|X_1 = j)$. En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.

3) Écrire une fonction simulant X_1 et X_2.

Solution :

1) Il est classique que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
En effet $X_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et si $i \in [\![1, n]\!]$, $(X1 = i) = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \cap \overline{E_{i-1}} \cap E_i$ où on a noté E_j = « le j-ième tirage donne la boule n ». La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-i+1}{n-i+2}\frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n}.$$

On sait alors que $E(X_1) = \dfrac{n+1}{2}$, $V(X_1) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

2) La loi de X_2 sachant $X_1 = n$ est la loi certaine de paramètre 0 donc :

$$\mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, la loi de X_2 sachant $X_1 = i$ est la loi $\mathcal{U}([\![1, n-i]\!])$ donc

$$\mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = i) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-i} & \text{si } k \in [\![1, n-i]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet on est ramené à la question précédente où on effectue des tirages sans remise jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro ; cette fois le nombre de boules dans l'urne est $n - i$.

3)
```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul(n):
    l = list(range(1, n + 1))
    tirage = rd.randint(len(l))
    #print(l[tirage])
    X1 = 1
    while l[tirage]! = n:
        del l[tirage]
        tirage = rd.randint(len(l))
        #print(l[tirage])
        X1 += 1
    del l[tirage]
    #print('suite')
    if X1 = = n:
        X2 = 0
    else:
        n2 = max(l)
        tirage = rd.randint(len(l))
        #print(l[tirage])
        X2 = 1
        while l[tirage]! = n2:
            del l[tirage]
            tirage = rd.randint(len(l))
            #print(l[tirage])
            X2 += 1
        del l[tirage]
    return X1, X2

# pour v\'erifier la loi conditionnelle de X2 sachant X1 = i

hist = []
n = 20
i = 6
for k in range(100000):
    X1, X2 = simul(n)
    if X1 = = i:
        hist.append(X2)

plt.hist(hist, range(1, n-i + 2))
```