Oral Centrale et Mines 2014
Indications sur la plupart des exercices à la fin

1. (*Mines MP*) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

a) par un argument de dénombrement ;

b) d'une autre manière.

2. (*Centrale MP*) Soit p un nombre premier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \,|\, p^k | n\}$.

a) Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Relier $v_p(n)$, $v_p(m)$ et $v_p(mn)$.

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle v_p(m!) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ non divisible par p. Calculer $v_p\left(\dbinom{p^k q}{p^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. (*Centrale MP*) Soit $(G, .)$ un groupe fini de cardinal n ; soit S une partie non vide de G. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A(k) = \{s_1.s_2 \ldots s_k \;;\; (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in S^k\}$.

a) Montrer que la suite des cardinaux des $A(k)$ est croissante, et qu'elle est constante au plus tard à partir du rang n.

b) Montrer que $A(n)$ est un groupe. Donner un exemple où $A(k)$ n'est un groupe pour aucun $k \in [\![1, n-1]\!]$.

4. (*Centrale MP*) On rappelle le théorème de Lagrange : dans un groupe fini, le cardinal de tout sous-groupe est un diviseur du cardinal du groupe.

Soit $(G, .)$ un groupe fini. Pour tout $x \in G$, on note C_x l'ensemble $\{y \in G \,|\, xy = yx\}$. On note Z le centre de G, c'est-à-dire l'ensemble $Z = \{x \in G \,|\, \forall y \in G \quad xy = yx\}$ des éléments x qui commutent avec tous les éléments de G.

a) Montrer que, pour tout $x \in G$, C_x est un sous-groupe de G, ainsi que Z.

b) On suppose que $\mathrm{Card}G/\mathrm{Card}Z$ est un nombre premier. Montrer que G est commutatif ; on pourra pour cela considérer $x \in G \setminus Z$ et le sous-groupe H engendré par x et Z.

Dans toute la suite, on suppose G non commutatif.

c) Minorer $\mathrm{Card}G/\mathrm{Card}Z$.

d) On choisit un couple (x, y) au hasard dans G^2. Montrer que la probabilité d'avoir $xy = yx$ est inférieure à $5/8$.

5. (*Mines MP*) Soit K un corps quelconque, et $A = K \times K$.

a) Préciser les lois qui munissent A de sa structure canonique d'anneau ; A est-il un corps ?

b) Déterminer les idéaux de A.

6. (*Centrale MP*) On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; c'est aussi le nombre de générateurs du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On admettra que $\varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$, la somme étant étendue à tous les diviseurs strictement positifs de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera G_n le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de la multiplication.

a) Les groupes G_8 et G_9 sont-ils cycliques ? Le cas échéant, donner tous les générateurs du groupe.

Soit p un nombre premier tel que $p \geqslant 3$. Dans toute la suite, on note $\overline{k}$ la classe d'un entier k dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b) Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers. Montrer que l'équation $x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a}_k x^k = 0$ a au plus n solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de $p - 1$. Montrer que l'équation $x^d = \overline{1}$ a exactement d solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

d) Montrer que G_p est cyclique.

7. (*Mines MP*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note E_n l'ensemble des polynômes à coefficients entiers unitaires de degré n dont toutes les racines complexes sont de module 1.

a) Montrer que E_n est un ensemble fini.

b) Soit $P \in E_n$; soit Q le polynôme unitaire dont les racines sont les carrés de celles de P. Montrer que $Q \in E_n$.

c) Montrer que les racines de tout élément de E_n sont des racines k-èmes de l'unité.

8. (*Mines MP*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_n : \mathbb{C}_n[X] \longmapsto \mathbb{C}_n[X]$, $P \longmapsto (X+10)P - XP(X+2)$. Déterminer le rang de F_n.

9. (*Mines MP*) Soient E un espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g$ soit une projection sur $\operatorname{Im} f$.

10. (*Mines MP*)

a) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \operatorname{tr}(AM) = \dfrac{\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(M)}{n}$.

b) Trouver tous les couples $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ vérifiant $\quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \operatorname{tr}(AMB) = \dfrac{\operatorname{tr}(AB)\operatorname{tr}(M)}{n}$.

11. (*Centrale MP*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Soit $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Pour tout $T \in E$, on note $m_P(T)$ le reste dans la division euclidienne de $P'T$ par P.

a) Montrer que $m_P \in \mathcal{L}(E)$.

b) ,On suppose que P possède n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

i. Montrer qu'il existe une unique famille $(L_1, \dots, L_n)$ de polynômes de E tels que $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple (i,j) ($\delta_{i,j}$ = symbole de Kronecker = 1 si $i = j$, 0 sinon).

ii. Montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de E.

iii. En déduire une expression de $\det(m_P)$ en fonction des L_i et du coefficient dominant de P.

c) Montrer que $\det(m_P) = 0$ si et seulement si m_P admet une racine multiple. On prend $P = X^3 + pX + q$; donner une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q, pour que P ait une racine multiple.

d) Calculer $\displaystyle\prod_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n-1} \left(e^{2ik\pi/n} - e^{2i\ell\pi/n}\right)^2$.

12. (*Mines MP*) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13. (*Mines MP*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$;

ii. $f \circ f = 0$ et il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ f + f \circ h = \mathrm{Id}_E$.

14. (*Centrale MP*) Soient $A \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par : pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\quad u(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A^{(k)} P^{(n-k)}$.

a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $u(P)$ est un polynôme constant. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} u$.

b) Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ dans le cas $A = (X-a)^n$.

c) On suppose que A admet une racine a. Calculer $u\big((X-a)^n\big)$.

d) Si $A = (X-a_1)\dots(X-a_n)$, où les a_i sont des complexes deux à deux distincts, déterminer $\operatorname{Ker} u$.

15. (*Mines MP*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles ?

16. (*Centrale MP*)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $a_{ii} = 0$ pour tout i, et $|a_{ij}| = 1$ pour tout (i,j) tel que $i \neq j$.

i. Calculer $\det A$ dans le cas où tous les coefficients non diagonaux valent 1. En raisonnant modulo 2, montrer que, si n est pair, alors A est inversible.

ii. Que peut-on dire du rang de A si n est impair ?

b) On suppose donné un tas de n cailloux tel que, si l'on en retire un quelconque, on puisse répartir les $n-1$ cailloux restants en deux tas de même masse.

i. Montrer que n est impair. Pour tout n impair, donner un exemple de masses $(m_1, \dots, m_n)$ non nulles réalisant cette situation.

ii. On suppose que $n = 2k+1$, et que, si l'on retire un caillou quelconque, on peut répartir les cailloux restants en deux tas de même masse, les deux tas comprenant k cailloux. Montrer que les cailloux ont tous la même masse.

17. (*Centrale MP*) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) On suppose que le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé. Montrer qu'il existe une droite de E stable par u.

b) On suppose que χ_u admet un diviseur $Q = X^2 + aX + b$ avec $a^2 - 4b < 0$. Montrer : $\operatorname{Ker} Q(f) \neq \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} Q(f)$ non nul. Montrer que $\operatorname{Vect}\big(x, f(x)\big)$ est un plan de E stable par f.

18. (*Mines MP*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice de symétrie, toute matrice carrée S vérifiant $S^2 = I_n$.

a) Soient S_1 et S_2 deux matrices de symétrie, et $A = S_1 S_2$. Montrer que A est semblable à son inverse.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable semblable à son inverse. Montrer que A est le produit de deux matrices de symétrie.

19. (*Centrale MP*)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent $1/n$, et p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice P dans la base canonique. Montrer que p est un projecteur, et préciser ses éléments caractéristiques.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Enfin, on note H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ dans la base canonique.

b) Montrer qu'il existe $u_0 \in H$ tel que le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $\big(f_\sigma(u_0)\big)_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$ soit exactement H.

c) Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec tous les f_σ sont exactement les éléments de $\operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, p)$.

20. (*Mines MP*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$. Montrer que M est diagonalisable.

21. (*Mines MP*)

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soient $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(M) = 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ premier avec P. Montrer que $Q(M)$ est inversible.

b) Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BC$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

22. (*Centrale MP*) On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a la propriété (P) s'il n'existe qu'un nombre fini de matrices B semblables à A vérifiant $AB = BA$.

a) On suppose, uniquement dans cette question, que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples ; montrer que A a la propriété (P).

b) On suppose que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$. Montrer que A est semblable à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $D = \operatorname{diag}(1, \lambda, \lambda^2)$. Calculer $D^{-1}ND$; en déduire que A n'a pas la propriété (P). Adapter le raisonnement précédent dans le cas où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

c) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ a une unique valeur propre triple, à quelle condition a-t-elle la propriété (P) ?

d) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait la propriété (P) ; on pourra utiliser le lemme des noyaux.

23. (*Mines MP*) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \big\{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\big\}$ et $G = \big\{f \in E \mid f'' = f\big\}$.

a) Montrer que $E = F \oplus G$.

b) On munit E du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_0^1 [fg + f'g'](t)\,dt$. Déterminer le projeté orthogonal d'un élément h de E sur G.

24. (*Mines MP*) Soient A et B deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $C = (A+B)/2$ soit orthogonale.

25. (*Mines MP*) Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tel que $a^3+b^3+c^3=49$.

Déterminer une matrice A de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne soit $\begin{pmatrix} a/7 \\ b/7 \\ c/7 \end{pmatrix}$. Préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

26. (*Centrale MP*) Soient E un espace euclidien, $k \in E$ un vecteur unitaire et s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\, k$. Pour tout couple $(x,y) \in E^2$, on pose $\varphi(x,y) = \big(s(x)\,|\,y\big)$.

a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\quad \varphi(x,y) = 2(k|x)\,(k|y) - (x|y)$. En déduire qu'il existe des vecteurs x vérifiant $\varphi(x,x) > 0$.

b) Soit $a \in E$ tel que $\varphi(a,a) > 0$. Montrer que, pour tout vecteur x tel que $\varphi(x,a) = 0$, on a $\varphi(x,x) \leqslant 0$: préciser les cas d'égalité.

c) Soient $b \in E$, et D la droite affine passant par b de direction $\mathrm{Vect}\, a$; donc $D = \big\{b + \lambda a ; \lambda \in \mathbb{R}\big\}$. Montrer qu'il existe un unique vecteur b' orthogonal à k tel que $D = \big\{b' + \mu a ; \mu \in \mathbb{R}\big\}$.
Montrer qu'il existe exactement deux vecteurs $x \in D$ vérifiant $\varphi(x,x) = 0$, sauf dans le cas où $b \in \mathrm{Vect}\, a$. Que se passe-t-il dans ce cas ?

27. (*Centrale MP*) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ; soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ une liste de ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.

a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $\quad \sum_{i=1}^n f(a_{ii}) \leqslant \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)$.

b) On suppose ici les valeurs propres de A strictement positives. Montrer que $\quad \det A \leqslant \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

28. (*Mines MP*)

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique à valeurs propres strictement positives. Établir $\quad \det M \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{tr}\, M}{n}\right)^n$.

b) Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\beta > 0$ tel que $|a_{ij}| \leqslant \beta$ pour tout (i,j). Montrer que $\quad |\det A| \leqslant \beta^n n^{n/2}$.

29. (*Centrale MP*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et K un compact non vide de E. Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r.

a) Justifier l'existence de $R = \inf\big\{r \in \mathbb{R}_+ \,\big|\, \exists a \in E \quad K \subset \overline{B}(a,r)\big\}$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a_p \in E$ tel que $K \subset \overline{B}\Big(a_p, R + \dfrac{1}{p}\Big)$.

c) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $K \subset \overline{B}(a,R)$.

d) On suppose dans cette question que la norme sur E provient d'un produit scalaire. Montrer l'unicité de la boule fermée de rayon R contenant K.

30. (*Mines MP*) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On dit qu'une partie U de E est étoilée par rapport à un vecteur a si, pour tout $u \in U$, le segment $[au] = \big\{(1-t)a + tu \ ; \ t \in [0,1]\big\}$ est inclus dans U.

a) Montrer que, si U est étoilée par rapport à a, alors son adhérence $\overline{U}$ l'est aussi.

b) Montrer que, si U est étoilée par rapport à a, et si a est intérieur à U, alors l'intérieur de U est aussi étoilé par rapport à a.

31. (*Mines MP*) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application $P \longmapsto \sup\big\{|P(x)| \ ; \ x \in A\big\}$ soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) On suppose cette condition réalisée ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $P \longmapsto P(0)$ soit continue par rapport à cette norme.

32. (*Mines MP*) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \dfrac{u_n + (n+1)u_{n+1}}{n+2}$. Justifier la convergence et déterminer la limite de la suite (u_n).

33. (*Mines MP*) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2 u_n}$ peuvent-elles être toutes deux convergentes ?

34. (*Mines MP*) Soit (a_n) une suite réelle à termes strictement positifs, strictement croissante et divergente. Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et (z_n) une suite complexe vérifiant $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z_{n+1} - z_n}{a_{n+1} - a_n} = \ell$. Montrer que $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z_n}{a_n} = \ell$.

35. (*Centrale MP*) Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dy}{(1+t)^n}$ est-elle convergente ? Étudier la convergence de la série $\sum (u_n)^\alpha$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$; et la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

36. (*Mines MP*) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(\cos t)}$.

37. (*Mines MP*) Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a, b]$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une subdivision $a = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n} = b$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on ait $\displaystyle\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt$.

b) Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})$.

38. (*Mines MP*)

a) Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

b) Soit f continue, croissante et intégrable sur $[0, 1[$. Déterminer un équivalent de $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$.

39. (*Mines MP*) Après avoir justifié sa convergence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx$.

40. (*Mines MP*) Soient a, b, x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle x \ln\frac{x}{a} + y \ln\frac{y}{b} \geqslant (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$.

41. (*Centrale MP*) On étudie l'équation fonctionnelle (E) : $f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$.

a) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?

b) **i.** Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto xh(x)$. À quelle condition sur h, f est-elle solution de (E) ?

On définit une suite (h_n) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en prenant h_0 constante égale à 1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad h_{n+1}(x) = h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}\, h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

ii. Soient $x \in [0, 1]$ et $T_x : y \in \mathbb{R} \longmapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0, 1]$, et que $T_x\big([0, 1]\big) \subset [0, 1]$.

iii. Montrer que la suite (h_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

iv. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $[0, 1]$.

c) Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

42. (*Centrale MP*) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $G : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \big|f(t+x) - f(t)\big|\,dt$ a pour limite 0 en 0.

43. (*Centrale MP*) Soit E l'ensemble des suites d'entiers $(p_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $p_1 \geqslant 2$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} \geqslant p_n^{\,2}$.

Pour une telle suite $p = (p_n)_{n\geqslant 1}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$.

a) Dans cette question, on suppose $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $p_1 = 2$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} = p_n^{\,2}$. Calculer u_n pour tout n, et déterminer la limite de la suite (u_n).

b) Soit $a \in\,]0, 1[$. Montrer que $\quad (1-a)\prod_{k=1}^{n}(1 + a^{2^k}) \leqslant 1 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que, pour toute suite p dans E, la suite (u_n) converge vers un élément de $]1, 2]$.

Dans le reste de l'exercice, on note, pour toute suite p de E, $f(p)$ la limite de la suite (u_n) associée.

c) Soit p dans E. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que $\quad u_{n+m} \leqslant \dfrac{u_n}{1 - 1/p_n^{\,2}} \quad$ puis $\quad u_n < f(p) \leqslant \dfrac{u_n}{1 - 1/p_n^{\,2}}$.

d) Soit $x \in\,]1, 2]$. Montrer qu'il existe une unique suite $p \in E$ telle que $\quad u_n < x \leqslant \dfrac{u_n}{1 - 1/p_n^{\,2}} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f réalise une bijection de E dans $]1, 2]$.

44. (*Mines MP*) Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\quad S_x(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_A(n)\frac{x^n}{n!} \quad$ où χ_A est la fonction caractéristique de A ($\chi_A(n)$ vaut 1 si $n \in A$, 0 sinon).

a) Montrer que $S_x(A)$ est bien défini pour toute $A \subset \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \,]0, \ln 2[$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^p}{p!}$. En déduire que l'application $A \longmapsto S_x(A)$ est injective.

45. (*Centrale MP*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $\displaystyle f_n(t) = e^{-nt} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nt)^k}{k!}$.

a) Soit $t \in [0, 1[$.

i. Montrer que $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - f_n(t) = e^{-nt} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!}$.

ii. Montrer que $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant 1 - f_n(t) \leqslant \frac{e^{-nt}(nt)^n}{n!(1-t)}$.

iii. Montrer que $f_n(t)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

b) Soit $t \in \,]1, +\infty[$. Montrer que $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(t) \leqslant n \frac{e^{-nt}(nt)^n}{n!}$ et en déduire que $f_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) Étudier le cas $t = 1$.

46. (*Mines MP*) Déterminer la limite de $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\, dt}{(1+t^2)^n}$ quand n tend vers $+\infty$.

47. (*Mines MP*) Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n!\, dx}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ est-elle convergente ? Déterminer la limite de la suite (I_n).

48. (*Mines MP*) Pour $x > 0$, on pose $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\, dt}{t+x}$.
Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Y est-elle de classe C^1 ?
Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

49. (*Mines MP*) Soit $F : a \longmapsto \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a}\, dt$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $]0, 1[$.

b) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, avec $p < q$. À l'aide du changement $\displaystyle t = \frac{u^q}{1+u^q}$, montrer que $\displaystyle F\Big(\frac{p}{q}\Big) = q \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{qn+p}$.

c) Pour tout $a \in \,]0, 1[$, donner une expression de $F(a)$ sous forme de somme de série.

50. (*Centrale MP*) Soit $f : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\, dt$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f ; étudier le sens de variation de f.

b) Pour $x \in D$, déterminer une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$.

c) Montrer que $g : x \longmapsto (x+1)f(x)f(x+1)$ est constante sur D.

d) Déterminer la limite de f en $+\infty$, et trouver un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

51. (*Mines MP*) Soit $\displaystyle f : x \longmapsto \sum_{p \geqslant 2} \frac{1}{p^x \sqrt{\ln p}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f ; montrer qu'elle est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

b) Donner un équivalent de f en 1^+ et en $+\infty$.

c) Existence et calcul éventuel de $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

52. (*Mines MP*) Soit $\displaystyle F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de F ; déterminer les limites de F aux bornes de ce domaine.

b) Montrer que $\displaystyle \forall x \in D \quad F(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2x^2 - 1}$.

c) Soit ℓ la limite en $+\infty$ de F ; déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ell - F(x)$.

53. (*Mines MP*) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{t^n}{(\ln n)^{\ln n}}$ puis étudier sa convergence pour $t = R$ et $t = -R$.

54. (*Centrale MP*) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$; si f est une fraction rationnelle n'ayant ni pôle ni zéro de module r, on pose $\quad N_r(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}\, re^{it}\, dt.$

a) Si f et g sont des fractions rationnelles n'ayant ni pôle ni zéro de module r, montrer que $N_r(fg) = N_r(f) + N_r(g)$.

b) Soit $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| \neq 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\, dt}{e^{it} - a}$; on pourra distinguer les cas $|a| < 1$ et $|a| > 1$.

c) Soit f un polynôme n'ayant pas de racine de module r. Montrer que $N_r(f)$ est le nombre de racines (comptées avec leur multiplicité) de f appartenant au disque de centre 0 et de rayon r.

55. (*Centrale MP*) On pose $a_0 = 1$; et, pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n le nombre de manières de découper un polygone convexe à $n + 2$ sommets en triangles disjoints dont les sommets sont ceux du polygone ; on a donc $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

a) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

b) On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. En supposant le rayon de convergence de cette série entière non nul, déterminer une équation (E) vérifiée par f.

c) Déterminer une fonction g, développable en série entière au voisinage de 0, vérifiant l'équation (E) ; puis montrer que $f = g$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

d) Donner un équivalent de a_n.

56. (*Centrale MP*) Soit $f : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} t^n \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f, et montrer que f est de classe C^1 sur D.

b) Déterminer la limite de f en 1^-.

Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\quad 0 \leqslant e^t - \Big(1 + \dfrac{t}{n}\Big)^n \leqslant e - \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n$ et en déduire un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers 1^-.

c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

57. (*Mines MP*) Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs strictement positives. Soit (E) l'équation différentielle $y'' - q(t)y = 0$.

a) Soit y une solution non nulle de (E), s'annulant en un point $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que a soit le seul zéro de y sur $]a - \beta, a + \beta[$.

Montrer que y n'a pas d'autre zéro que a.

b) Soit y_1 la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y_1(0) = y_1'(0) = 1$. Montrer que $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y_1(t) \geqslant 1 + t$.

c) Soit $\quad y_2 : x \longmapsto y_1(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{y_1(t)^2}$. Montrer que y_2 est définie sur $\mathbb{R}_+$, et y est solution de (E).

Montrer que y_2 est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Que peut-on dire des solutions de (E) bornées sur $\mathbb{R}_+$?

58. (*Centrale MP*) Soit $(E) : y'' + py' + qy = 0$, où p et q sont deux fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$; on suppose de plus que q n'est pas la fonction nulle. On étudie l'existence de solutions y_1 et y_2 de (E) sur I à valeurs réelles, et inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire vérifiant $y_1 y_2 = 1$.

a) Si p et q sont constantes, donner une conditions suffisante d'existence.

On revient au cas général ; dans les deux questions suivantes, on suppose trouvé un couple (y_1, y_2) de solutions vérifiant $y_1 y_2 = 1$.

b) Montrer que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Qu'en déduit-on sur leur wronskien W ?

c) Exprimer W en fonction de y_1.

d) Montrer que $W' + pW = 0$.

e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (p, q) pour que (E) possède deux solutions inverses l'une de l'autre.

59. (*Mines MP*) Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{tr}(M^3)$. Déterminer la différentielle de f en un point M_0 quelconque.

60. (*Mines MP*) Soit E un espace euclidien, et $f : x \in E \setminus \{0_E\} \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Déterminer la différentielle de f en tout point x. Pour quels x, $df(x)$ est-elle une isométrie ?

61. (*HEC S*) Une urne contient n jetons numérotés de 0 à $n-1$. On tire un à un, avec remise et au hasard, trois jetons dont les numéros sont notés X, Y et Z respectivement. On tire ensuite trois jetons, un à un, sans remise, et on note A, B et C respectivement les numéros obtenus. On pose $p_n = P(X + Y = Z)$ et $q_n = P(A + B = C)$.

a) **i.** Calculer p_n.

ii. Calculer q_n en distinguant les cas n pair et n impair.

iii. Montrer que $\dfrac{p_n}{q_n} \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

b) **i.** Calculer $r_n = P(X + Y + Z = n - 1)$.

ii. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $E(s^{X+Y+Z}) = \dfrac{1}{n^3}\Big(\dfrac{1-s^n}{1-s}\Big)^3$.

iii. Retrouver alors la valeur de r_n à l'aide de la formule ci-dessus.

62. (*HEC S*) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Quelle(s) valeur(s) de j maximise(nt) $P(X = j)$?

b) Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle(s) valeur(s) de λ maximise(nt) $P(X = j)$?

c) Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $E(|X - \lambda|) = \dfrac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}$.

63. (*HEC S*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi.
On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Pour $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$, on pose $F_n(a) = P(S_n \leqslant a)$.

a) **i.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1[$, $\dfrac{1}{(1-t)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} t^k$.

ii. Soit $p \in]0, 1[$. Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $p_{n,k}$ la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ soit égale à k.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,0}$ et montrer que, si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,k} = \frac{1}{p}$.

b) Soit $a > 0$. On pose $N_a = \mathrm{Card}\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, S_n \leqslant a\big\}$; autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $N_a(\omega)$ est le nombre, éventuellement égal à $+\infty$, des entiers n pour lesquels $S_n(\omega) \leqslant a$.

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(N_a = n)$ est un événement de $\mathcal{A}$, et que $P(N_a = n) = F_{n-1}(a) - F_n(a)$.

ii. Justifier que $(N_a < +\infty)$ est dans $\mathcal{A}$. Montrer que la suite $\big(F_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que sa limite vaut 0 si et seulement si $P(N_a < +\infty) = 1$.

iii. On suppose dans cette question que la série $\sum F_n(a)$ converge. Montrer que N_a admet une espérance, et que $E(N_a) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a)$.

c) Soit $p = P(X_1 = 0)$; on suppose $p \in]0, 1[$.
En utilisant les variables aléatoires Y_n définies par : $Y_n = 0$ si $X_n = 0$, $Y_n = 1$ sinon, montrer que, pour tout $a > 0$, on a $E(N_a) \leqslant \dfrac{\lfloor a \rfloor + 1}{p}$ où $\lfloor a \rfloor$ est la partie entière de a.

Indications

1. Noter que $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Pour le **a)**, compter de deux manières les parties à n éléments d'un ensemble de cardinal $2n$; pour le **b)**, on peut par exemple utiliser le fait que $\binom{2n}{n}$ est un coefficient du développement de $(1 + x)^{2n}$.

2. a) Noter que $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. **b)** $\lfloor m/p^k \rfloor$ est le nombre d'entiers $j \leqslant m$ vérifiant $v_p(j) \geqslant k$; on relie facilement ces nombres au nombre d'entiers vérifiant $v_p(j) = k$. **c)** Simplifier $(p^k q)!/(p^k q - p^k)!$, et comparer les $v_p(p^k q - j)$ à $v_p(j)$.
3. a) Noter que, quand u décrit $A(k)$, les éléments $s_1 u$ sont deux à deux distincts. Montrer que, si $|A(k)| = |A(k+1)|$, alors $|A(k+1)| = |A(k+2)|$, en notant que les éléments de $A(k+1)$ peuvent aussi bien s'écrire sous la forme us_1 que $s_1 u$. b) Le théorème de Lagrange montre déjà que $e \in A(n)$, et donc $A(2n) = A(n).A(n)$ contient au moins $A(n) = e.A(n)$, ce qui donne la stabilité par produit.
4. b) Examiner $\mathrm{Card}G/\mathrm{Card}H$ et $\mathrm{Card}H/\mathrm{Card}Z$ pour prouver que $H = G$, et montrer que les éléments de H sont tous de la forme $x^k y$, où $y \in Z$. **c)** 2 et 3 sont premiers... **d)** Compter les couples tels que $x \in Z$, et ceux pour lesquels $x \notin Z$ et $y \in C_x$, en fonction de $z = \mathrm{Card}Z$, puis utiliser **c)**.
5. b) Si a et b sont non nuls et si un idéal I contient (a, b), montrer que $I = A$.
6. b) Puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, pour toute solution $\overline{x}_0$ de l'équation, on peut factoriser par $x - x_0$. **c)** Noter que $x^{p-1} = \overline{1}$ pour tout $x \in G_n$. Si $p - 1 = dk$, examiner les solutions de $x^k = \overline{1}$. **d)** Commencer par montrer que, pour tout diviseur d de $p-1$, G_p contient 0 ou $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.
7. a) Penser aux relations entre coefficients et racines. **b)** Commencer par relier les polynômes P et Q à $R = \prod(X^2 - a^2)$, produit étendu à toutes les racines de P. **c)** Si a n'est pas racine k-ème de 1, l'ensemble des a^{2^p} est infini.
8. Si $P \in \mathrm{Ker}\, F_n$ et a est une racine de P, alors $a+2$ et $a-2$ sont racines de P, sauf si... ; et P n'a qu'un nombre fini de racines.
9. On peut par exemple décomposer en blocs les matrices de f et g dans une base bien choisie.
10. a) Utiliser les matrices de la base canonique. **b)** Penser à $\mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP)$.
11. b)iii. Les L_i sont vecteurs propres pour m_P. **c)** Si a est racine multiple, alors $X - a$ divise P', ce qui permet de construire un élément non nul de $\mathrm{Ker}\, m_P$. **d)** Avec $P = X^n - 1$, c'est à un facteur près le produit des $L_k(\lambda_k)$.
12. Pour les plans stables : le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit annule cet endomorphisme, et divise celui de M.
13. Pour **i.** $\Longrightarrow$ **ii.**, décomposer les matrices en blocs dans une base bien choisie. Pour la réciproque, utiliser $\mathrm{rg}\, u \circ v \leqslant \mathrm{rg}\, u$ et $\mathrm{rg}\, u + v \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$ pour minorer $\mathrm{rg}\, f$.
14. a) Dériver $u(P)$. **b)** Noter que tous les termes de $u(P)$ s'annulent en a, sauf peut-être $A^{(n)}P$. **c)** Si v est l'endomorphisme u associé à un deuxième polynôme B, alors $u(B) = v(A)$.
15. Penser à la densité.
16. a)i. On trouve $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$. **a)ii.** Penser aux matrices extraites. **b)ii.** Noter que le vecteur $(m_1, \ldots, m_n) = (1, \ldots, 1)$ convient, et utiliser **a)ii**.
17. b) Pour $\mathrm{Ker}\, Q(f) \neq \{0_E\}$, noter que les racines complexes de Q sont valeurs propres de la matrice de f, donc 0 est valeur propre de la matrice de $Q(f)$. Montrer d'autre part que $\mathrm{Vect}\big(x, f(x)\big)$ est un sous-espace stable qui ne peut pas contenir de droite stable.
18. b) En diagonalisant, on se ramène à décomposer des blocs de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ en produit de matrices de symétrie. Chercher les facteurs sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
19. b) Prendre par exemple $u_0 = (1, -1, 0, \ldots, 0)$. **c)** Si g est un tel endomorphisme, commencer par prouver que u_0 est un vecteur propre de g en trouvant σ tel que $\mathrm{Vect}(u_0)$ soit exactement un sous-espace propre de f_σ (forcément pour la valeur propre -1...).
20. Déterminer un polynôme annulateur en combinant l'équation et sa transposée.
21. b) Chercher une expression simple de $P(D)$, et noter que P' est premier avec P si P est à racines simples.
22. a) Si $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces propres de f sont stables par g ; ici, ces sous-espaces sont des droites, et f et g ont les mêmes valeurs propres. **c)** Noter que A a la propriété (P) si et seulement si $A - \lambda I_3$ l'a. **d)** Dans le cas d'une valeur propre λ d'ordre 2 et d'une valeur simple μ : soit A n'est pas diagonalisable, s'inspirer du **b)** ; soit elle l'est, dans ce cas toute base du plan propre pour λ peut être associée aux valeurs propres λ et μ pour B.
23. b) Noter que F et G sont orthogonaux.
24. Les colonnes de A, B et C doivent être des vecteurs unitaires.
25. Pour la deuxième colonne de A, on peut reprendre les coefficients de la première, à l'ordre et au signe près.
26. Pour les deux premières questions, il peut être utile de décomposer les vecteurs concernés suivant $\mathrm{Vect}\, k$ et son orthogonal.

27. a) On peut développer brutalement $A = PD^tP$ où P est orthogonale, ce qui fournit les a_{ii} comme barycentres des λ_k.
28. a) Tout exprimer en fonction des valeurs propres ; utiliser par exemple la concavité de ln. **b)** Si $\det A \neq 0$, montrer que l'on peut prendre $M = {}^tAA$ dans le **a)**.
29. a) Il suffit de montrer que l'ensemble est non vide. **c)** Noter que (a_p) est bornée, on peut donc... **d)** Supposer l'existence de deux boules distinctes, faire un dessin en dimension 2 pour trouver une boule de rayon $< R$ contenant K.
30. b) Si x est intérieur à U, choisir deux boules de centres respectifs a et x et de même rayon incluses dans U, pour prouver facilement que $[ax]$ est intérieur à U.
31. a) A doit être non vide et bornée pour que le sup soit défini, et infini pour avoir $\|P\| = 0 \Longrightarrow P = 0$. **b)** Si 0 n'est pas adhérent à A, utiliser le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass pour construire des polynômes tels que $\|P\|$ soit proche de 1, mais $P(0)$ "très grand".
32. Étudier $u_{n+1} - u_n$.
33. Penser à Cauchy-Schwartz.
34. Appliquer les théorèmes de sommation des relations de comparaison avec la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$.
35. Une intégration par parties donne un équivalent de u_n ; en réitérant, on obtient un développement asymptotique.
36. Utiliser un développement asymptotique de la fonction intégrée, en faisant en sorte que l'intégrale du terme inconnu tende vers 0.
37. b) Si F est la primitive de f qui s'annule en a, exprimer les $x_{n,k}$ à l'aide de F^{-1}, et penser aux sommes de Riemann.
38. a) Il s'agit presque de sommes de Riemann pour $x \longmapsto (1-x^2)^{-1/2}$; encadrer à l'aide d'intégrales.
39. Transformer $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx$ en $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_b^{2b} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$. Le deuxième terme tend facilement vers 0 quand b tend vers $+\infty$; pour le premier, écrire $e^{-x}/x = (1/x) + \varphi(x)$, où φ est bornée au voisinage de 0.
40. Utiliser la convexité de $-\ln$, avec x et y comme coefficients du barycentre.
41. b)iii. Étudier la série $\sum(h_{n+1} - h_n)$, en montrant en particulier grâce au **ii.** que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant |h_n(x/2) - h_{n-1}(x/2)|$, puis en remontant jusqu'à $h_1 - h_0$.
42. Commencer par justifier le résultat pour l'intégrale sur un segment $[-b, b]$; puis utiliser le fait que $\int_{-\infty}^{a} |f|$ et $\int_a^{+\infty} |f|$ ont pour limite 0 quand a tend vers $+\infty$.
43. Les produits u_n du **a)** et $\prod(1 + a^{2^k})$ du **b)** sont des sommes partielles de séries géométriques. **c)** Majorer u_{n+m} comme en **b)**, mais en faisant démarrer les produits du rang $n+1$. **d)** En le réécrivant en fonction de u_{n-1} et p_n, l'encadrement fournit p_n à l'aide d'une partie entière. En écrivant ensuite que $u_{n+1} < u_n/(1 - p_n^2)$, on obtient $p_{n+1} \geqslant p_n^2$.
44. b) Pour l'inégalité, étudier les variations de la différence par récurrence. Pour l'injectivité, si $A \neq B$, prendre pour p le plus petit entier qui est dans une partie mais pas dans l'autre.
45. a)ii. Sortir un facteur $(nt)^n/n!$ de la somme, majorer le terme général restant pat t^{k-n}. **a)iii.** Utiliser l'équivalent de Stirling pour $n!$, et penser à $\ln(1+t) \leqslant t$. **b)** Pour la majoration, montrer que les termes de la somme sont dans l'ordre croissant. **c)** Euh...Voir
http ://math.stackexchange.com/questions/136996/partial-sums-of-exponential-series
46. On peut effectuer une intégration par parties dans $I_n - I_{n+1}$ pour obtenir une récurrence vérifiée par la suite, puis calculer I_n.
47. En distribuant les facteurs de $n!$, le dénominateur devient $(1+x)(1+x/2)(1+x/3)\ldots$. Commencer par justifier la divergence de ce produit.
48. Pour l'équivalent en $+\infty$, poser $u = xt$ et comparer à l'intégrale de e^{-u}/x^2. En 0, commencer par une intégration par parties.
49. c) Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$.
50. c) g est 1-périodique d'après **b)** ; penser au sens de variation. **d)** Utiliser **c)** et le sens de variation pour encadrer $f(x)$. **e)** Utiliser le développement de l'exponentielle ; minorer $\sin t$ par $2t/\pi$ (concavité) pour majorer les modules des coefficients.
51. b) En $+\infty$, le premier terme de la somme est le plus important ; en 1, comparer à une intégrale, dans laquelle on pourra poser $u = \sqrt{\ln t}$.
52. b) Couper le domaine d'intégration en 1. Pour permuter intégrale et série, justifier que l'intégrale du reste tend vers 0 en utilisant le TSSA. **c)** Comparer à $\sum(-1)^{k-1}/k^2x^2$.
53. Noter que $(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln(\ln n)}$.
54. b) Développer en série, en utilisant la série géométrique. **c)** Factoriser f et utiliser **a)**.

55. a) Fixer arbitrairement un côté $[AB]$ du polygone à $n+3$ sommets, et compter les triangulations en considérant les différents cas pour le troisième sommet du triangle ayant $[AB]$ comme côté. **b)** Grâce au produit de Cauchy, on trouve une équation du second degré en $f(x)$. **c)** Dans les deux choix possibles, un seul est développable en série entière en 0 ; montrer que ses coefficients vérifient les mêmes conditions que (a_n).
56. b) L'encadrement permet de majorer $e^t/(1-t) - f(t)$ par la somme $S(t)$ d'une série entière ; à l'aide d'un développement asymptotique de $e - (1+1/n)^n$, justifier que $S(t)$ est bornée au voisinage de 1. **c)** Développer $(1+t/n)$ par la formule du binôme ; justifier qu'on peut réorganiser la somme en une série entière. Il n'est pas utile de calculer exactement ses coefficients ; on peut les majorer simplement pour prouver que le rayon de convergence est non nul.
57. a) Pour β, noter qu'on ne peut pas avoir $y'(0) = 0$. Pour l'unicité du zéro, considérer deux zéros consécutifs et penser à la convexité par exemple. **b)** Commencer par montrer que y_1 ne peut pas s'annuler. **c)** Pour y_2 bornée, majorer $1/y_1^2$ par y_1'/y_1^2. Pour les solutions bornées, penser à la dimension de l'espace des solutions.
58. b) La condition $q \neq 0$ interdit les solutions constantes non nulles. **e)** En remplaçant W dans $W' + pW = 0$ par son expression en fonction de y_1, on trouve $q = -{y_1'}^2/y_1^2 < 0$ et donc q C^1 ; en écrivant que $y_1' = \pm y_1\sqrt{-q}$ et en remplaçant dans (E), on trouve une condition sur p.
59. Développer $f(M+H)$ et utiliser la continuité et la linéarité de la trace pour majorer les termes “petits”. Ne pas oublier $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ qui permet de simplifier l'expression.