

DS1 : Suites ultimement périodiques

On dit qu'une suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **ultimement périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n.$$

On dira que l'entier p est **une** période de la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$.

noter qu'on parle de la période, bien que la suite ne soit pas périodique à partir du premier terme.

On note UP l'ensemble des suites ultimement périodiques de réels.

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés élémentaires de ces suites et le caractère ultimement périodique éventuel de certaines suites.

On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : pour une suite ultimement périodique $(a_n)_n$, il existe une plus petite période $T > 0$ et les autres périodes sont les multiples de T . Cet entier T sera appelé **la** période de la suite .

Partie I

1. Montrer que UP est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.
2. Que peut-on dire de la suite $(a_n) \in \text{UP}$ lorsque la période T est égale à 1 ?
3. Démontrer que toute suite $(a_n) \in \text{UP}$ est bornée. On note $\|a\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

4. Un premier exemple :

Dans cette seule question, on définit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$F_0 = 1, F_1 = 0, F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$$

On pose ensuite $a_n = 1$ si F_n est pair, et $a_n = 0$ sinon.

- (a) Préciser les valeurs de a_n pour tout $n \leq 9$
- (b) Démontrer que $a \in \text{UP}$. Préciser un entier n_0 à partir duquel a est périodique ainsi que la période T de a .
- (c) Pour tout réel $\lambda \in]-1, 1[$ on pose $u_n = a_n \lambda^n$.

Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et démontrer que sa somme est égale à $\frac{\lambda}{1 - \lambda^3}$.

5. Une somme utile dans la suite :

On revient désormais au cas général. Soit λ un nombre réel, et $(a_n)_n \in \text{UP}$ de période T . On pose pour tout entier n ,

$$S_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$$

- (a) Démontrer qu'il existe un unique entier k_n (dépendant de n et T) tel que $k_n T \leq n < (k_n + 1)T$, et déterminer la limite de $\frac{k_n}{n}$ quand n tend vers l'infini.
- (b) Démontrer l'égalité suivante valable pour tout entier $n > 0$:

$$S_{n+n_0}(\lambda) = S_{n_0-1}(\lambda) + \lambda^{n_0} \left(\sum_{j=0}^{T-1} a_{j+n_0} \lambda^j \right) \left(1 + \lambda^T \dots + \lambda^{T(k_n-1)} \right) + \lambda^{n_0} \sum_{j=k_n T}^n a_{j+n_0} \lambda^j$$

6. Convergence au sens de Cesàro :

Soit $(a_n)_n \in \text{UP}$. Démontrer que la suite de terme général

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k.$$

est toujours convergente et exprimer sa limite en fonction du nombre $M = \sum_{j=0}^{T-1} a_{j+n_0}$

On utilisera le résultat de la question précédente

7. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de UP.

- (a) Montrer que
la somme

$$S(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$$

est bien définie pour tout réel $\lambda \in]-1, 1[$.

- (b) Montrer que sur l'ensemble $] -1, 1[$, S est une fonction rationnelle de la forme

$$\lambda \mapsto \frac{R(\lambda)}{1 - \lambda^T}$$

où R est un polynôme, et T la période de a .

On utilisera la formule démontrée à la question 5 et on démontrera que $\lambda^{n_0} \sum_{j=k_n T}^n a_{j+n_0} \lambda^j$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Partie II

Dans cette partie, on étudie deux exemples indépendants l'un de l'autre.

8. Exemple 1 : La suite de Thue-Morse.

On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = a_n \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = -a_n.$$

On ne cherchera pas à déterminer d'expression explicite de a_n .

On conserve la notation

$$\forall \lambda \in]-1, 1[, \quad S(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$$

- (a) Montrer que $|S(\lambda) - 1| \leq \frac{|\lambda|}{1 - |\lambda|}$ pour tout $\lambda \in]-1, 1[$. En déduire la limite de $S(\lambda)$ quand λ tend vers 0.
- (b) Démontrer la relation $S(\lambda) = (1 - \lambda)S(\lambda^2)$.
En déduire que :

$$\forall \lambda \in]-1, 1[, \quad S(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - \lambda^{2^k}).$$

- (c) Montrer que S est bornée sur $] -1, 1[$.
- (d) Démontrer que, pour n donné dans $\mathbb{N}$, la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{S(\lambda)}{(1 - \lambda)^n}$$

est bornée sur $] -1, 1[$.

- (e) Conclusion : démontrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.

indication : on pourra utiliser la question 7.b

9. Exemple 2 : Développement décimal des réels.

- (a) Soit $d_0 \in \mathbb{N}$ et $(d_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers appartenant à $\llbracket 0, 9 \rrbracket$. On suppose que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ultimement périodique.

Montrer que le réel $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ est bien défini, et est un nombre rationnel.

On souhaite maintenant démontrer une réciproque du résultat ci-dessus. Soit y un nombre rationnel positif. On écrit $y = \frac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers strictement positifs et premiers entre eux. On définit deux suites d'entiers $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- $d_0 = \lfloor y \rfloor$ (partie entière) et r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b ;
- pour tout $n \geq 1$, r_n (resp. d_n) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b .

- (b) Justifier que l'on peut trouver deux entiers n_0, n_1 avec $n_1 > n_0$ tels que $r_{n_0} = r_{n_1}$.

En posant $T = n_1 - n_0$, démontrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{UP}$.

- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq 9$.

- (d) Établir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $y = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^{n+1}}$.

- (e) En déduire que y possède une écriture décimale $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ avec (d_n) ultimement périodique.

Partie III

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = 1$ si $\sin n > 0$, $a_n = 0$ sinon. Le but de cette partie est d'étudier si cette suite à valeurs entières est élément de UP.

On admet que le nombre π est irrationnel.

10. La suite $(\sin n)$ est-elle ultimement périodique ?

11. On suppose que la suite $(a_n)_n$ est ultimement périodique.

- (a) Montrer qu'il existe un entier N et un entier strictement positif T tels que, pour tout entier k supérieur ou égal à N , le signe de $\sin(kT)$ soit constant (et, en particulier, que $\sin kT$ est non nul).
- (b) En déduire que la suite $(\cos(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ est composée de réels strictement positifs à partir d'un certain rang.

12. Soit $G = \mathbb{Z}T + 2\pi\mathbb{Z} = \{nT + 2k\pi, (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

- (a) Montrer que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
- (b) Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$?

Ceci implique et on l'admet ici que G est une partie dense dans $\mathbb{R}$.

13. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?

Partie IV (hors barème : ne traiter que si tout le reste est fini)

Dans cette partie, on établit que π est irrationnel. On suppose le contraire et on écrit $\pi = \frac{a}{b}$ avec a, b entier positifs premiers entre eux.

Pour tout entier n , et on pose $f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$

14. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que l'intégrale $I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx$ est un entier.

15. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$

16. Conclure.