Algèbre linéaire sans réduction :révisions de première année.

Un peu d'histoire : Femmes et mathématiques.

Jusqu'a récemment, il ne faisait pas bon être une femme pour faire des mathématiques. La première à s'y être essayée, Hypatie d'Alexandrie au 4eme siècle, fut lapidée en pleine rue. Au 19eme siècle encore, Sophie Germain, amie de Gauss à qui l'on doit une forme faible du théorème de Fermat devait utiliser le pseudonyme de Monsieur Leblanc pour ses publications mathématiques. Emmy Noether (une très grande algébriste, elle fit faire des progrès considérables en théorie des anneaux) dut quant à elle, malgré le soutien des plus grands mathématiciens (masculins) du début du 20eme siècle (entre autres Hilbert et Klein), attendre douze ans après sa thèse pour obtenir un poste de professeur d'université. Aujourd'hui encore, le pourcentage de femmes parmi les chercheurs prouve que les mathématiques restent une discipline trés masculine. Cependant l'année 2014 est à marquer d'une pierre blanche, puisque pour la première fois la médaille Fields a récompensé une mathématicienne : il s'agit de l'iranienne Maryam Mirzakhani couronnée pour ses travaux en géométrie riemannienne, une branche des mathématiques considérée comme particulièrement difficile. L'ukrainienne Maryna Viazovska qui a résolu en 2016 le problème des empilements compacts en dimension 8 (une généralisation du celèbre problème de Kepler sur les empilements de sphères) a quant à elle recu le prix en 2022. De nombreuses autres femmes devraient suivre.

Généralités sur les espaces vectoriels et l'indépendance linéaire

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps contenant une infinité d'éléments et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
   (a) Démontrer que la réunion de 2 sous espaces vectoriels E_1 et E_2 ne peut pas être un espace vectoriel sauf si l'un est un sous espace de l'autre (prendre x_1 dans E_1 et x_2 dans E_2 et voir à quelle condition leur somme et dans E_1 ou dans E_2).
   (b) Soient maintenant $E_1, ..., E_p$ des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.
   On suppose que la réunion de tous les E_i est un espace vectoriel.
   Soient $x_1, ..., x_p$ des éléments de $E_1 \dots E_p$ avec $x_p \neq 0$. On suppose que x_p n'est dans aucun des $E_i, i \leq p-1$.
   Montrer, en considérant les vecteurs de la forme $x_j + \lambda x_p$ pour une infinité de valeurs de λ, que E_p contient tous les autres x_j.
   En déduire que l'un des E_i contient tous les autres.

2. Etudier l'indépendance linéaire des familles de fonctions suivantes :

   $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f = \tan$

   $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f = \tan$

   $(f_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ avec $f_{a,b}(t) = t^a e^{bt}$

3. On suppose que F est un endomorphisme tel que $F^n = 0$ (endomorphisme nul) et $F^{n-1} \neq 0$. Il existe donc un vecteur $\vec{e}$ tel que $F^{n-1}(\vec{e}) \neq \vec{0}$.
   Montrer que la famille $(\vec{e}, F(\vec{e}), \dots, F^{n-1}(\vec{e}))$ est une famille libre.

4. *independance linéaire sur* $\mathbb{Q}$.
   Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   Montrer que la famille des $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est $\mathbb{Q}$ libre.

5. L'indépendance linéaire et un propriété globale.

   Donner un exemple de famille de vecteurs $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m})$ deux à deux non colinéaires, mais qui soit liée.
   Plus généralement, donner un exemple de famille de vecteurs $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m})$ liée dont toutes les sous familles sont libres.

6. Soit f une application linéaire de E dans F. Soient $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}$ des vecteurs de E.
   (a) Montrer que si la famille $(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}))$ est libre, alors la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m})$ est libre.
   (b) Montrer que si la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m})$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}))$ est libre.

7. Exercices d'indépendance sur des polynômes.
   a) Soit P un polynôme de degré n. Montrer l'indépendance des polynômes
   $$P, P', \dots, P^{(n)}$$
   b) Montrer par deux méthodes l'indépendance des polynômes
   $$1, X, \frac{X(X+1)}{2}, \dots \frac{X(X+1)\dots(X+n)}{n!}$$

c) *difficile.* Montrer l'indépendance des polynômes

$$X^n, (X+1)^n, \ldots, (X+n)^n$$

d) *difficile.* Soit P un polynôme de degré n. Soient $a_0 \ldots a_n$ des scalaires distincts. Montrer l'indépendance des polynômes

$$P(X+a_0), \ldots, P(X+a_n)$$

8. Le résultant.

   Soient P et Qdeux polynômes (à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degrés p et q.

   (a) On suppose que P et Q sont premiers entre eux. Démontrer que si R et S sont deux polynômes non nuls tels que $PR = QS$ alors $deg(R) \geq q$. Trouver une inégalité analogue sur le degré de S.
   (b) On suppose que P et Q ne sont pas premiers entre. Ils ont donc une racine commune dans $\mathbb{C}$. Trouver un polynôme R de degré $q-1$ et un polynôme S de degré $p-1$ tels que $PR = QS$
   (c) En déduire l'équivalence suivante : les polynômes P, Q sont une racine commune si et seulement si la famille de polynômes

   $$\big(P, XP, .., X^{q-1}P, Q, XQ, ..., X^{p-1}Q\big)$$

   est liée.
   (d) On prend $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = P'$. Ecrire un déterminant de taille 3 dont la nullité soit équivalente à au fait que P et P' ont une racine commune. Calculer ce déterminant commenter.

9. Soient A, B, C trois sev d'un ev E vérifiant les trois conditions : $A \cap C = A \cap B, A + C = A + B, B \subset C$.
   (a) On suppose que E est de dimension finie. Démontrer que $B = C$.
   (b) Montrer que la conclusion est toujours vraie si la dimension est infinie.
   (c) Montrer que
   Montrer que le résultat devient faux si l'on enlève l'une des hypothèses.

10. Supplémentaire commun.

    Soient F et G deux sous espaces vectoriels stricts de même dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie.
    (a) Montrer qu'il existe une droite D qui est simultanément en somme directe avec F et G
    Comme il existe des sous espaces en somme directe avec F et G on puet parmi eux en choisir un (noté H) H de dimension maximale.
    (b) Montrer que H est un supplémentaire de F et de G. POur cela, on pourra supposer le contraire et considérer les espaces $F \oplus H$ et $G \oplus H$.

Applications linéaires.

11. Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$ Trouver alors l'image et le noyau de $p + q$.

12. Soient p, q deux projecteurs. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur leur noyau et leur image pour que $pq = qp = q$

13. (mines)
    Soient u, v deux endomorphismes de E de dimension finie tels que rg $u+$ rg $v \leq \dim E$ et $u + v = Id$. Montrer que u, v sont des projecteurs.

14. *classique.* Commutant de $\mathcal{L}(E)$

    Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$. On se propose de démontrer que f est une homothétie.
    (a) Soit e un vecteur non nul : justifer il existe un projecteur p tel que Vect$(e) = \operatorname{Im} p$.
    (b) En déduire que pour tout vecteur e non nul, la famille $\{e, f(e)\}$ est liée. On peut donc écrire $f(e) = \lambda_e e$ où λ_e est un réel.
    (c) Montrer que le réel λ_e ne dépend pas du vesteur e choisi. On a ainsi montré que f est une homothétie.
    (d) Justifier que si p est un projecteur, alors $Id + p$ est bijectif.
    En déduire que les endomorphismes qui commutent avec tous les automorphismes sont aussi les homothéties.
    (e) Quels sont les endomorphismes dont la matrice ne dépend pas de la base ?

15. On suppose que E est de dimension 3, que f est un endomorphisme non nul tel que $f^2 = 0$. Déterminer la dimension de son image et de son noyau.

16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour qu'il existe un endomorphisme de E vérifiant $\ker f = \operatorname{Im} f$.

17. Etablir en toute généralité, pour des espaces des endomorphismes en dimension finie l'inégalité suivante :

$$\dim \operatorname{Ker}(fg) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$$

On pourra considérer la restriction de g à $\operatorname{Ker}(fg)$.

18. On suppose que E est un espace de dimension 10 et que f,g, h sont trois endomorphismes de rang 7. Montrer que $f \circ g \circ h$ n'est pas l'endomorphisme nul.

19. *classique.* Noyaux emboités (1).

Soit E de dimension finie, et $f \in L(E)$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$
(b) Montrer l'équivalence des affirmations
- $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$
-$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$
-$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$

20. *classique.* Noyaux emboités (2)

Soit E de dimension finie, et $f \in L(E)$.

(a) Montrer pour tout entier k que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$
(b) Montrer que si pour un certain k on a $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$ alors la suite des nouayx stationne à partir du rang k, c'est à dire que pour tout $p > k$ on a aussi $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$. Montrer qu'on a également pour tout $p > k$ $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p$
(c) Soit n_0 le plus petit entier k à partir duquel la suite des noyaux stationne. Montrer que $\operatorname{Im} f^{n_0} \oplus \operatorname{Ker} f^{n_0} = E$
(d) Démontrer que l'indice n_0 est au maximum égal à la dimension de E.

21. Pseudo inverse (centrale)

E de dimension finie, $f, g \in L(E)$.

(a) Si $fgf = f$ montrer que fg est un projecteur d'image $\operatorname{Im} f$ et gf est un projecteur de noyau $\ker f$
(b) On considère les assertions :
1) $fgf = f$
2) $gfg = g$
3) rg(f) =rg(g)

Montrer que 2 de ces assertions impliquent la troisième.
(c) Lorsque f est inversible, montrer que g est unique et la déterminer.
(d) Montrer, en travaillant dans une base judicieuse, que pour tout f on peut trouver g telle que les 3 assertions soient vraies.

22. *classique. difficile.* Factorisation d'applications linéaires
E est un espace vectoriel de dimension finie.
soit f et g deux endomorphismes de E tels que $\ker f \subset \ker g$. Montrer qu'il existe h tel que $g = h \circ f$.
indication : construire h sur une base de E obtenue en complétant une base de $\operatorname{Im} f$.

23. *classique.* Endomorphisme de l'espace des polynômes.
Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$\phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Soit ϕ_n sa restriction à $\mathbb{K}_n[X]$

(a) Déterminer le noyau de ϕ et montrer en utilisant le théorème du rang que $\operatorname{Im} \phi_n = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
(b) Déterminer l'image de ϕ .
(c) En déduire qu'il existe exactement un polynôme P tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^k$ Quel est son degré ?

(d) Soit k un entier. Montrer que la somme $S_n = 1 + 2^k + .. + n^k$ est un polynôme en n

24. *classique.* Polynômes d'interpolation (centrale)
Soient $a_1, ..., a_n$ des réels distincts.
a) Déterminer le noyau de l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ par :
$P \mapsto (P(a_1), ..., P(a_n), P'(a_1), ..., P'(a_n))$
b) En déduire l'existence en l'unicité d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n-1$ dont les $P(a_i)$ et $P'(a_i)$ sont imposés.
c) *difficile.* Calculer ce polynôme lorsque $(P(a_1), ..., P(a_n), P'(a_1), ..., P'(a_n))$ est un des vecteurs de la base canonique.

Matrices.

25. *classique.* Matrices de rang 1
    (a) Soient X, Y deux vecteurs colonne de taille n. Montrer que la matrice XY^T est une matrice carrée de rang 1.
    (b) Réciproquement, montrer qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1 peut s'écrire. $M = XY^T$ avec X, Y vecteurs colonne. (on prendra pour Y une colonne non nulle de M). Le couple (X, Y) est il unique ?

26. Décomposition en matrices de rang 1.
Soit M une matrice de rang r. Démontrer que M est la somme de r matrices de rang 1 (il en résulte d'après l'exercice précédent qu'il existe des matrices colonnes $X_1, ..., X_r$ et $Y_1, ..., Y_r$ (non uniques) telles que $M = \sum X_i Y_i^T$.

27. Réciproquement, soient $X_1, ..., X_p$ et $Y_1, ..., Y_p$ deux familles de vecteurs colonne. On pose $M = \sum X_i Y_i^T$.
Montrer que M est de rang inférieur ou égal à p. Montrer que le rang est p si et seulement si chacune des deux familles $(X_1, ..., X_p)$ et $(Y_1, ..., Y_p)$ est libre.

Utilisation de matrices équivalentes
On rappelle que M et N sont équivalentes si et seulement si il existe des matrices P, Q inversibles telles que $M = Q^{-1}NP$, ou encore si et seulement si elles ont même rang. Les trois exercices qui suivent utilisent cette propriété.

28. (a) Soit M une matrice carrée. Montrer qu'il existe deux matrices inversibles dont M est la somme.
    (b) Soit M une matrice rectangulaire de taille n, p dont le rang est égal au nombre de colonnes. Montrer qu'il existe une matrice N telle que $NM = I_p$.
    (c) Soit M une matrice carrée quelconque. Montrer qu'il existe une matrice N telle que $NMN = N$ et $MNM = M$
    On commencera par traiter le cas de la matrice canonique de rang r, J_p.
    (d) *classique.* Déterminer les matrices X telles que pour tout Y on ait $\det(X+Y) = \det X + \det Y$

29. Idéaux de $M_n(\mathbb{K})$.
Soit F un idéal bilatère de $M_n(K)$ (c'est à dire un sous espace vectoriel ayant de plus la propriété suivante : $\forall M \in F, \forall A \in M_n(K), AM \text{et} MA \in F$) On suppose F non réduit à $\{0\}$
    (a) Montrer que si F contient une matrice M de rang r il contient toutes les matrices de même rang.
    (b) Montrer qu'alors F contient toutes les matrices de rang inférieur à r.
    (c) Montrer que $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

30. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(A)\ f(B)$$
.
a) Que vaut $f(I_n)$?
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) = 0 \Leftrightarrow A$ non inversible.

les 4 exercices suivants, sont importants utilisent la notion de matrice semblable. Il est important de bien faire la différence avec la notion de matrices équivalentes.

31. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \Leftrightarrow \exists B$ base de E telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}$, A etant une matrice inversible.

32. Soit M une matrice de rang 1. Montrer que M est semblable à une matrice dont tous les termes non nuls sont dans la première colonne.
En déduire que $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$

33. *classique.* Soit M une matrice non scalaire.

    Montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

    indication : justifier qu'il existe un vecteur X tel que X, MX soit libre. Se placer alors dans une base dont les deux premiers vecteurs sont X et MX Les question qui suivent sont des applications classiques de ce résultat :

    Application : Soit $M \in M_2(R)$ telle que $M^2 + M + I = 0$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

34. *classique.* Soit M une matrice de taille n de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice dont la diagonale est identiquement nulle. (on utiliserai l'exercice précédent et on procèdera par récurrence sur la taille de la matrice)

35. *difficile.* Dénombrement de matrices sur les corps finis.
    Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, K étant un corps fini de cardinal $q = p^r$, ou p est un nombre premier..

    (a) Calculer Le cardinal de $M_n(\mathbb{K})$
    (b) Montrer que $|GL_n(\mathbb{K})|$ possède $(q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1})$ éléments.
    (c) Trouver le nombre de droite vectorielles de E
    (d) Déterminer enfin e nombre b_k de sous espaces vectoriels de dimension k de E.

36. A propos des transvections.
    On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $Mn(\mathbb{K})$ et pour $a \in \mathbb{K}$, et $i \neq j$ on note $T_{i,j}(a)$ la matrice $I + aE_{i,j}$. Une telle matrice est appelée matrice élémentaire, ou matrice de transvection. On rappelle que la multiplication d'une matrice M à gauche par la matrice $T_{i,j}(a)$ réalise l'opération élémentaire : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$.

    (a) Expliquer l'effet sur la mtrice M de la multiplication à droite par la matrice $T_{i,j}(a)$.
    (b) Quel est l'inverse de $T_{i,j}(a)$? Quel est le déterminant de $T_{i,j}(a)$?
    (c) Expliquer , à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, pourquoi toute matrice de déterminant 1 est un produit de matrices de transvections (on ne demande pas de preuve détaillée)
    (d) Montrer que toutes les matrices $T_{i,j}(a)$ pour a non nul sont semblables entre elles.

37. Sous algèbres de dimension $n^2 - 1$.
    Soit $n \geq 1$ et H un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$.

    (a) Rappeler la valeur du produit $E_{i,j}E_{k,l}$
        On suppose que H est stable par produit et ne contient pas l'identité.
    (b) Démontrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme $N + aI_n$ aven $N \in H$ et $a \in \mathbb{C}$.
    (c) Soit M une matrice telle que que $M^2 \in H$. Démontrer que $\Rightarrow M \in H$
    (d) Montrer que pour tout i, j, $E_{i,j}$ est élément de H.
    (e) En déduire une contradiction.
        Ainsi, tout hyperplan stable par produit contient I_n Ceci assure que c'est une sous algèbre.

38. Décomposition LU.

    (a) Soit L triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et U triangulaire supérieure inversible. On pose $M = LU$. Montrer que toutes les matrices M_i extraites de M en ne conservant que les i premières lignes et colonnes sont inversibles.
    (b) *difficile.* Réciproquement, Si la matrice M possède les propriétés précédentes alors il existe un unique couple (L, U) du type précédent, tel que $M = LU$
        Procéder par récurrence et faire des produits par blocs

Exercices théoriques

39. On suppose que f est un endomorphisme tel que $f^2 = -Id_E$. Que peut on dire de la dimension de E?.

40. Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire n'est jamais inversible.

41. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose de déterminer le rang de sa comatrice.
premier cas : $rg(A) = n$. Démontrer que dans se cas, la comatrice de A est aussi de rang n.
Second cas :$rg(A) = n - 1$. Démontrer que la comatrice de A est de rang 1.
troisieme cas : $rg(A) \leq n - 2$. démontrer que la comatrice de A est nulle (de rang 0)

42. Calculer le déterminant de la comatrice de M en fonction du déterminant de M.

43. Matrices à coefficients entiers.
On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices à coefficients entiers ayant un inverse à coefficients entiers.
    (a) Démontrer que si M est un élément de $GL_n(\mathbb{Z})$, alors son déterminant doit être égal à ± 1.
    (b) Réciproquement, en utilisant la formule de la comatrice, démontrer que si M est une matrice à coefficients entiers de déterminant ± 1 alors son inverse est aussi à coefficients entiers.
    (c) On considère une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ élément de $GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que les nombres a, c sont premiers entre eux.
    (d) Peut on trouver une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est $(3, 7)$?

44. *Caractère polynômial du déterminant :*
Montrer que pour toutes matrice A, B de taille n, le déterminant $\det(A + xB)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à n.

45. Soient A et B dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A + kB$ soit ne soit pas inversible pour tout k de $\{0, \ldots, 4\}$. Montrer que $A + 5B$ n'est pas inversible.

46. *classique.* Montrer que deux matrices carrées réelles qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Indication : Soient A, B deux matrices réelles telles que $A + iB$ soit inversible. Démontrer en utilisant le caractère polynomial du déterminant qu'il existe un réel c tel que $A + cB$ soit inversible.

Exercices semi explicites. Matrices de blocs

47. *classique.* Soient A, B des matrices réelles. On se propose de montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$
a) Montrer que la matrice par blocs $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse sous forme de blocs (on pourra commencer par le cas $n = 1$ pour deviner l'inverse par blocs).
b) calculer le produit $P^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} P$
c) Conclure.

48. Soient A, B, C, D 4 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On se propose de montrer que si D, C commutent, on a l'égalité :
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$
a) On suppose dans un premier temps que D est inversible. Multiplier à droite par une matrice par blocs de la forme $\begin{pmatrix} U & 0 \\ V & W \end{pmatrix}$ et montrer qu'on peut choisir U, V, W de façon à obtenir une matrice triangulaire supérieure par blocs.
b) Conclure alors dans ce cas.
c) On suppose que D n'est pas inversible, montrer que le résultat subsiste en utilisant judicieusement le caractère polynômial du déterminant.

Exercices calculatoires.

49. Calculer le déterminant des matrices $(a_{i,j})_{1\leq i,j\ leqn}$ suivantes : Dans chacun des cas, il pourra être utile de commencer par de petites valeurs de n pour comprendre la situation.
   (a) $a_{i,j}=1$ si $i=1$ ou $j=1$ ou $i=j$. $a_{i,j}=0$ sinon.
   (b) $a_{i,j}=\max(i,j)$
   (c) $a_{i,j}=(i+j)^2$ (faire des combinaisons sur les lignes et montrer que le déterminant est nul pour $n>3$)
   (d) $a_{i,i}=a_{i,i+1}=1$ pour tout i ,$1\leq i\leq n-1$ et $a_{n,j}=b_j$. avec $(b_1,\ldots,b_n)$ réels.
   (e) $a_{i,j}=\cos(n(i-1)+j)$ On utilisera une formule de trigonométrie.
   (f) $a_{i,j}=\left(\begin{array}{c} n+i-1 \\ j-1 \end{array}\right)$
   Faire des combinaison sur les lignes et colonnes en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux. La réponsse est 1.
   (g) *difficile.* $a_{i,i}=a_i+b_i, a_{i,j}=b_i$. ou $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,...,b_n)$ sont des réels non nuls. (On trouvera $a_1..a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$).
   (h) *difficile.* $a_{i,j}=P(i+j)$, $1\leq i,j\leq n$ avec P polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$

50. *classique.* Une formule de récurrence.

   Soit $w\in\mathbb{C}$ Trouver une relation de récurrence satisfaite par le déterminant $D_n=\left|\begin{array}{cccc} 1+w^2 & w & & \\ w & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & w \\ & & w & 1+w^2 \end{array}\right|$ (les termes ne figurant pas sur les trois diagonales sont tous nuls)
   En déduire l'expressions de D_n en fonction de w.

51. Calculer le déterminant obtenu à partir d'une matrice de Vandermonde en enlevant l'avant dernière ligne et l'avant dernière colonne. (Indication : développer un vandermonde selon l'avant dernière colonne)

52. On note $C(x)=(x,\frac{x^2}{2!},\ldots,\frac{x^n}{n!})$.
   Calculer le déterminant de la matrice M_n dont les lignes sont $C(x),C'(x),C''(x),\ldots,C^{(n-1)}(x)$.
   Indication : calculer la dérivée du déterminant.

53. *difficile.* Soient $(a_1,...,a_n)$ des scalaires. Calculer le déterminant $D=\det((a_i-a_j)^2)$
   Indication : on considèrera ce déterminant comme un polynôme en a_n. Quel est son degré ? Etudier ses racines

54. *difficile.* Soient $z_1,\ldots,z_n$ les racines du polynôme X^n-X+1.
   Calculer le déterminant $|1+\delta_{i,j}z_i|_{i,j}$.

55. *classique.* Soit $A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$ Calculer le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $M\mapsto AM$, puis celui de l'endomorphisme $M\mapsto AMA$

56. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $P\mapsto 2P+XP'+(X^2-1)P$" dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

57. *classique.* astucieux. Soit M une matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont des entiers impairs, et les autres sont des entiers pairs.
   Montrer que M est inversible.

Formes linéaires et hyperplans.

58. Justifier qu'il existe une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,1,1)=0$, $f(1,1,2)=1$ et $f(1,0,1)=2$ Déterminer son noyau.

59. Soit E un espace vectoriel.
   Soient H_1,H_2 deux hyperplans. Quelle est la codimension de $H_1\cap H_2$?

60. Soient $f_1, \dots, f_p$ p formes linéaires.

(a) Montrer qu'elles forment une famille génératrice de E^* si et seulement si $\cap_i \ker f_i = \{0\}$

indication : considérer l'application linéaire : $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$

(b) Montrer plus généralement que

$$f \in \text{Vect} < f_1, \dots, f_p > \Leftrightarrow \bigcap_i \ker f_i \subset \ker f$$

61. Etudier, selon les valeurs de a, b, c l'indépendance des formes linéaires $P \mapsto P(a), P \mapsto P(b), P \mapsto \displaystyle\int_0^c P(t)dt$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$

62. Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{R}[x]$ vérifiant la propriété suivante : si $P(1) = 0$ alors $f(P) = 0$. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout polynôme P on ait $f(P) = cP(1)$.

63. *classique.* Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.
i. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $f(X) = tr(AX)$.
ii. Lorsque A est la matrice canonique de rang r, déterminer une matrice inversible M telle que $tr(AM) = 0$
iii. Démontrer que tous les hyperplans de $M_n(\mathbb{K})$ contiennent une matrice inversible.

64. Montrer que les formes linéaires $(f \to f^{(n)}(0))_{n \leq p}$ forment une base de l'espace $\mathbb{R}_p[X]^*$

65. Montrer que les formes linéaires $f \to f^{(n)}(0)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace $\mathbb{R}[X]$
Vérifier que la forme linéaire $P \mapsto P(1)$ n'est pas combinaison linéaire des formes linéaires précédentes.