Intégrales impropres

Un peu d'histoire : Jérome Cardan (1501-1576)

Personnage aux multiples facettes (mathématicien, philosophe..) Cardan est d'abord un grand médecin. A son époque, dans l'Italie de la renaissance, le défi mathématique porte sur l'équation du troisième degré . En 1545, il coiffe sur le poteau son rival Tartaglia (qui l'accuse, non sans raison, de lui avoir volé ses idées) et donne des formules de résolution par radicaux valable pour toute équation du 3eme degré. Ces formules seront généralisées plus tard par Ferrari pour l'équation de degré 4. Au passage Cardan donne une première intuition du nombre $\sqrt{-1}$(qu'il appelle nombre impossible) mais la formalisation des nombres complexes viendra beaucoup plus tard. Par ailleurs féru d'astrologie, Cardan sera condamné par le tribunal de l'inquisition (très sourcilleux à cette époque, pensez à Copernic ou plus tard Galilée) pour avoir osé publier un horoscope du Christ.

Préliminaire : Révisions sur les calculs de primitives.

A Calculer les primitives et intégrales suivantes. On utilisera une intégration par parties

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+u)}{u^2}du$

(b) $\displaystyle\int \sin(x)e^{-3x}dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 t^n|n(t)^n dt$

(d) $\displaystyle\int \arctan x dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x dx$

(f) $\displaystyle\int (\tan x)^{2n}dx$ (donner une relation de récurrence)

B Calculer les intégrales suivantes en trouvant un changement de variable adéquat

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x+1}+1}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}dt$

(c) $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{du}{2u+u\ln u}$

(e) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ (on commencera par faire le cdv $t=\pi-x$)

(f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$

C Primitives de fractions rationelles.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{(x-1)^2}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx$

D Utilisation de fonction trigonométriques.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

(b) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^2 x dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{4+\tan^2 t}dt$

Exercices pratiques d'intégrabilité

1. Dans cet exercice on demande d'étudier l'existence des intégrales proposées. Il n'est pas demander de les calculer. On commencera dans tous les cas par déterminer quelles sont les bornes impropres.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x)e^{-3x}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(\sin t)dt$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}}dx$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan u}{u\sqrt{u}}du$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{u}\right)du$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty t^6 e^{-t^2+3t}dt$

2. Dans l'exercice suivant, on demande d'étudier selon l'existence de l'intégrale de f sur l'intervalle considéré. On discutera le cas échéant selon la valeur des paramètres.

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^a)}{x^b}$ $\quad I =]0,\infty[$

(b) $f(t) = \left[\dfrac{1-(1+t)e^{-t}}{t^a}\right]$ $\quad I =]0,+\infty[$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[a]{(x-2)^{a-1}(3-x)}}$ $\quad I =]2,3[$

(d) $f(x) = \dfrac{x^a-1}{\ln(\sin\frac{\pi}{2}x)}$ $\quad I =]0,1[$

(e) $f(x) = \dfrac{a\cos(bx)+c\cos(dx)}{x^3}$ $\quad I =]0,\infty[$

(f) $f(t) = \dfrac{e^{-at}}{\sqrt{|t(t-1)(t-2)|}}$ $\quad I =]0,+\infty[$

Calculs d'intégrales impropres

3. Calculer les intégrales suivantes (justifier leur existence) :

(a) $\displaystyle\int_0^\infty t^3e^{-t}dt$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}ch(tx)dt$ (en fonction de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt$).

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$ (faire le CDV $y = \dfrac{1}{x}$)

4. Intégrale de Poisson (1).
Démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)dt$$

(on justifiera la convergence des deux premières intégrales)

En déduire par un changement de variable la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$

5. *classique.* Intégrale de Poisson (2).

   (a) vérifier que pour tout réel t et tout réel x on a $(1 - 2x\cos t + x^2) \geq (|x| - 1)^2$.

   (b) En déduire sans calcul que l'intégrale
   $$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2)dt$$
   est bien définie pour tout x réel tel que $|x| \neq 1$

   (c) Montrer que $I(x) = I(-x)$ puis en utilisant l'égalité (qu'on ne demande pas de vérifier)
   $$(1 - 2x\cos t + x^2)(1 + 2x\cos t + x^2) = (1 - 2x^2\cos(2t) + x^4)$$
   établir que $I(x^2) = 2I(x)$, entre $I(x)$

   (d) Montrer que $\lim_{x\to 0} I(x) = 0$ puis démontrer à l'aide des résultats précédents $I(x) = 0$ pour $|x| < 1$.

   (e) Calculer $I(\frac{1}{x})$ en fonction de $I(x)$ et en déduire $I(x)$ pour $|x| > 1$.

   (f) Montrer que l'intégrale $I(1)$ est convergente et la calculer à l'aide de l'exercice précédent.

Intégrales de type $\dfrac{\sin t}{t}$

6. Etudier la convergence des intégrales suivantes.(suivre l'indication de méthode)

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$ (faire un changement de variable ou intégrer par partie entre A et 1)

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^x)dx$ (faire un changement de variable ou bien une intégration par parties entre 0 et A)

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \cos x}dx$ (faire un développement limité de la fonction au voisinage de l'infini)

   (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}dx$ (réfléchir avant de faire des choses compliquées).

7. *difficile.*
   Pour $x \in I = \mathbb{R}+$ On pose :
   $$f(x) = \frac{x}{1 + x^6\sin^2 x}$$
   a) Tracer sommairement le graphe de f.

   b) Démontrer que f est intégrable sur I si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t + n\pi)dt$ est convergente.

   c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + a\sin^2 x}$ en fonction du réel positif a

   d) En déduire que f est intégrable.

8. *classique.* Soients a, b deux réels strictement positifs.
   Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = J$.

   (a) On pose
   $$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx$$
   et $I(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$. Justifier leur existence et exprimer $J(\varepsilon)$ à l'aide de la fonction $\lambda \to I(\lambda)$.

   (b) Montrer qu'il existe un réel C tel que $I(\lambda) = -\ln\lambda + C + o_{0^+}(1)$.
   On pourra par exemple remarquer que $\ln\lambda = -\displaystyle\int_{\lambda}^{1} \frac{dx}{x}$ ou bien faire une intégration par partie.

   (c) En déduire la valeur de l'intégrale J

Exercices généraux.

9. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Montrer en considérant $f(t) = \dfrac{1}{t}$ que la réciproque est fausse.

10. Soit f intégrable décroissante intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f(x) = o_\infty\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

    Indication : on utilisera l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$ *dont on vérifiera qu'elle tend vers* 0 *quand* x *tend vers l'infini.*

11. Soit f une fonction positive intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la fonction $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$ est aussi intégrable sur cet intervalle. On pourra penser à l'inégalité de Cauchy Schwarz.

12. *classique.* Soit f de classe C^2 telle que f^2 et f''^2 soient intégrables sur $[0, \infty[$.

    (a) Montrer que ff'' est intégrable sur ce même intervalle.

    On se propose de montrer que $f'^2(x)$ est intégrable. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas.

    (b) Montrer que la fonction $G(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)^2 dt$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

    (c) A l'aide d'une intégration par partie et des questions précédentes, montrer que $f(x)f'(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

    (d) En déduire la limite de $f^2(x)$ quand x tend vers l'infini puis une contradiction.

13. *difficile.*
    On sait que la convergence d'une série implique que le terme général tend vers 0. Y-a-t'il un théorème analogue pour les intégrales $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$? La réponse est non (voir par exemple l'exercice 6.b). Cependant, les contre-exemples sont difficile à trouver, et la plupart du temps, si $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge, alors f tend vers 0. Cet exercice propose deux conditions suffisantes pour que ce soit le cas. Une facile et une plus difficile.

    On considère donc une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

    (a) On suppose que $f(x)$ possède une limite l en $+\infty$. Montrer que cette limite est forcément égale à 0.

    (b) On suppose que f est uniformément continue.
    On se donne $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'inégalité $|x - y| < \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

    (i) Majorer $|f(x)|$ à l'aide de ϵ et de l'intégrale $\displaystyle\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} |f(t)|dt$.

    (ii) En déduire que pour x assez grand $|f(x)| < 2\varepsilon$ et conclure.

14. *difficile.* Généralisation d'un exercice précédent.

    (a) Soit f une fonction de classe C^1 telle que $\dfrac{f(x)}{x}$ soit intégrable au voisinage de l'infini. Soient $a, b > 0$. Calculer

    $$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

    On appliquera la même méthode que dans l'exercice 8.

    (b) Pour $a \neq b > 0$, calculer

    $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx$$

15. Soit f telle que $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

    Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-at}dt$ pour $a>0$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ convergent.

    Indication : on pourra introduire une primitive F de f et faire une intégration par partie en intégrant f

16. Soit f ayant une limite finie en $\pm\infty$. Convergence et calcul de l'intégrale

$$\int_0^\infty f(t+1)-f(t)dt$$

17. Les espaces $L_1(I)$ et $L_2(I)$.

    On rappelle que $L1(I)$ est l'espace des fonctions intégrables sur I et que $L_2(I)$ est celui des fonctions dont le carré est intégrable sur I. On se propose de comparer ces espaces dans le cas où $I=]0,1]$ puis dans le cas ou $I=[1,+\infty[$.

    (a) Trouver une fonction f très simple intégrable sur $]0,1]$ mais dont le carré n'est pas intégrable sur cet intervalle.

    (b) Pour toute fonction continue, justifier l'inégalité $|f(x)|\leq \dfrac{1+f(x)^2}{2}$.
    En déduire que $L_2(]0,1])\subset L_1(]0,1])$.

    (c) Trouver une fonction f très simple dont le carré est intégrable sur $[1,+\infty[$ mais qui n'est pas intégrable.

    (d) Soit f la fonction définie par morceaux qui pour tout $n>0$ vaut n sur l'intervalle $[n,n+\dfrac{1}{n^3}]$ et zéro sur $]n+\dfrac{1}{n^3},n+1[$.
    Montrer que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ mais pas son carré.
    En déduire qu'il n'y a aucune inclusion entre $L_2([1,+\infty[)\subset L_1([1,+\infty[)$.

18. Comparaison des espaces L_p (généralisation de l'exercice précédent).

    Soit $p\in[1,+\infty[$. Pour tout intervalle I on note $\mathcal{B}(I)$ l'espace des fonctions bornées sur I et $L_p(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux f telles que $|f|^p$ est intégrable sur I.

    (a) Montrer que $L_p(I)$ est un espace vectoriel. (on remarquera pour $x,y\geq 0$ l'inégalité $(x+y)^p\leq 2^{p-1}x^p+y^p$).
    Soient p,q tels que $p>q\geq 1$.

    (b) Si I est borné, montrer l'inclusion $L_p(I)\subset L_q(I)$ en montrant par exemple que $f(x)^q\leq 1+f(x)^p$

    (c) Si $I=[1,+\infty[$
    Montrer que toute fonction bornée de $L_q(I)$ est dans $L_p(I)$.
    mais qu'il n'y a aucune inclusion entre les deux espaces.

Comparaison série intégrale. Intégration des relation de comparaison. Etude asymptotique de primitives

19. (centrale) Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ croissante Montrez que les séries de termes généraux $f(e^{-n})$ et $\dfrac{f(\frac{1}{n})}{n}$ sont de même nature. (on pourra remarquer que les deux fonctions $x\mapsto f(e^{-x})$ et $x\mapsto \dfrac{f(\frac{1}{x})}{x}$ sont décroissantes et utiliser le théorème de comparaison série intégrale).

20. Soit f une fonction positive dérivable telle que $f'(x)\sim -f(x)$ au voisinage de l'infini.

    (a) En intégrant une relation de comparaison, trouver un équivalent de $\ln f(x)$ (il faut être très précis dans l'application du théorème)

    (b) En déduire que $x^2f(x)$ tend vers 0 en l'infini.

    (c) Démontrer que f est intégrable au voisinage de l'infini et que $\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt\sim f(x)$.

21. (mines) Soit pour tout $n \geq 1$, $a_n = \int_n^\infty \frac{\tan(t)}{t^2} dt$

a) Justifier l'existence de a_n

b) Déterminer la nature de la série $\sum a_n$

22. (a) Soit $f(x)$ une fonction de classe C^1 ayant la propriété suivante :

f' est intégrable sur $[1, \infty[$.

On pose $u_n = f(n)$. Etablir que $u_n = \int_{n-1}^n f(t) + (t-n+1)f'(t)dt$.

(b) On pose $v_n = \int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)dt$. Montrer que la série de terme général v_n est absolument convergente.

(c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^n f(t)dt$ a une limite finie (ceci généralise le théorème de comparaison série intégrale).

(d) Application : étudier la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$. On peut admettre dans cette question que la suite $\cos(\ln n)$ est divergente.

23. *classique.* Etudier (variations, limites) sur $]0, 1[\cup]1, \infty[$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

24. Trouver un équivalent de $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ quand $x \to \infty$. On intégrera par parties en écrivant $e^{t^2} = \frac{1}{2t} 2te^{t^2}$ et on montrera que la nouvelle intégrale est négligeable.

25. Trouver un équivalent, puis un développement asymptotique de $I_n(x) = \int_x^\infty \frac{1}{t^2 \ln^2 t} dt$. (appliquer une méthode analogue à celle de l'exercice précédent)

26. (mines)

Existence et calcul de $\int_0^\infty (\int_y^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx) dy$.

On pourra procéder à une intégration par parties judicieuse.

Intégrales oscillantes et lemme de Riemann Lebesgue.

Les intégrales oscillantes font intervenir $\sin(nt)$ ou plus généralement $g(nt)$ ou g est une fonction périodique. Elle sont très importantes en physique. Lorsque n tend vers l'infini l'oscillation devient très rapide, ce qui produit, en intégrant, un effet de moyenne, ainsi c'est seulement la valeur moyenne du sinus (c'est à dire 0) ou de la fonction g qui intervient dans le résultat final.

27. Le lemme de Riemann-Lebesgue pour les intégrales usuelles.
(il s'agit d'un résultat classique important)

On considère une fonction de classe C^1 sur l'interavalle $[a, b]$. Démontrer à l'aide d'une IPP que

$$\int_a^b f(t) \sin ntdt \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

Nous démontrerons plus tard que ce résultat reste vrai si f est seulement continue par morceaux.

28. le Lemme de Riemann Lebesgue pour les intégrales impropres
Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}+$, Montrer que

$$\int_0^\infty f(t) \sin ntdt \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

.

On utilisera le Lemme de Riemann Lebesgue sur le segment $[0, M]$ pour M assez grand.

29. *difficile.*
Intégrales oscillantes (générales).

a) Soit g une fonction 2π périodique, et f la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$
On pose $\overline{g} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)dt$.
Montrer que

$$\int_0^{\infty} f(t)g(nt) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \overline{g}\int_0^{\infty} f(t)dt \qquad (1)$$

b) En déduire que la même formule (1) reste vraie pour toutes les fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$.
Nous prouverons plus tard, qu'en fait elle est vraie pour toutes les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ (les 5/2) peuvent le faire).
c) Finalement, montrer que la formule (1) est vraie pour toutes les fonctions intégrables sur $[0, \infty[$.

30. Intégrales oscillantes (2)(centrale)
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + |\sin nt|}dt$
1) Justifier l'existence de I_n
2) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini : pour cela, on pourra appliquer directement l'exercice précédent ou procéder comme suit :
a) Faire le CDV $nt = u$
b) Découper l'intervalle d'intégration en intervalles de longueur π et en déduire que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{-t-k\pi}{n}}}{1 + \sin t}dt$
c) En utilisant dans l'exponentielle que t est compris entre 0 et π encadrer I_n. par $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{-k\pi}{n}}}{1 + \sin t}dt$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{-(k+1)\pi}{n}}}{1 + \sin t}dt$
Ces deux quantités se calculent explicitement car on peut factoriser $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin t}dt$
d) Passer à la limite. La réponse est

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin t}dt = \frac{2}{\pi}$$