Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Un peu d'histoire : Galois (1811-1832)

La courte vie d'Evariste Galois est d'une impressionnante richesse et digne du meilleur feuilleton romantique. Contemporain de Gauss et Cauchy, il a tout juste 18 ans quand commencent les troubles politiques de la restauration et il s'engage auprès de Blanqui contre le régime de charles X. Au même moment, il est refusé au concours d'entrée de Polytechnique (sans doute pour attitude subversive) et rentre à l'ENS où il travaille sur la théorie des groupe et des corps finis. A la suite d'une manifestation il est mis en prison, et doit pendant quelques mois travailler de mémoire. Apres sa libération, il est provoqué en duel par un militaire « pour les yeux d'une infame coquette ». Il est tué à l'age de 20 ans. La nuit précédent sa mort, il a rédigé, dans une longue lettre à un ami l'essentiel de ses découvertes : elles sont colossales et ne seront comprises dans leur ensemble que bien des années plus tard. Parmi les conséquences de ses travaux on trouve le résultat suivant : il est impossible de résoudre par radicaux les équations de degré≥ 5. Il met ainsi un terme à la question ouverte par le perse Al - Khayyam, et poursuivie à la renaissance par les italiens Cardan et Ferrari . Sa dernière lettre se conclut par ses mots : " il me manque, pour être un savant, de n'être que celà"

Polynôme caractéristique.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de A
2. Soit A une matrice inversible. Déterminer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.
3. On montre que le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA.
   (a) Démontrer le résultat lorsque la matrice A est inversible.
   (b) Montrer qu'il existe un intervalle de la forme $]0, a[$ tel que pour tout $t \in I$ la matrice $A + tI$ soit inversible.
   (c) Soit λ un nombre complexe fixé. Montrer que la fonction $f(t) = \det((A + tI)\,B - \lambda I)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (d) Conclure.
4.
5. Soit A, B deux matrices, on pose $r = \operatorname{rg} B$.

   Montrer $\det(A + xB)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à r.
6. Soit A une matrice carrée.
   Exprimer le coefficient de degré 1 de χ_A à l'aide de la trace de la comatrice de A.

Exercices pratiques de diagonalisation.

7. Les matrices suivantes sont elles diagonalisables ?(discuter selon les paramètres, et lorsque la matrice est diagonalisable, faire la diagonalisation)

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$

   (e) $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

   L_1, L_n, C_i contiennent des 1, les autres termes sont nuls.

   (f) $D = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} \\ \frac{1}{y} & \frac{x}{y} & 1 \end{pmatrix}$

   Généraliser à la matrice de terme général $(\frac{a_i}{a_j})_{1 \leq i,j \leq n}$

8. Elements propres sans déterminant (1).

   On se propose d'étudier la diagonalisabilité de la matrice M de terme général $m_{i,j} = a_j + i\delta_{i,j}$, où $(a_1, \ldots, a_n)$ est une famille de nombres réels strictement positifs. Pour cela on cherche à résoudre directement l'équation $MX = \lambda X$. Soit dont X un vecteur non nul solution de cette équation.

   (a) Montrer que X est nécessairement colinéaire au vecteur $(\frac{1}{\lambda-1}, \ldots, \frac{1}{\lambda-n})$ et que
   $$\sum_i \frac{a_i}{\lambda - i} = 1$$

   (b) En déduire que M possède n valeurs propres réelles distinctes et est diagonalisable.

9. Elements propres sans déterminant (2).

   On considère la matrice M telle que $m_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. On se propose de déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

   a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne.

   On pose $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$. Montrer que X est vecteur propre pour la valeur propre a si et seulement si $x_0, x_1, .., x_n, x_{n+1}$ sont les premiers termes d'une suite récurrente linéaire (R) d'ordre 2 que l'on précisera.

   b) En distinguant selon que $a^2 = 4$ ou non, déterminer les solutions de la récurrence (R) dont le premier terme est nul (on exprimera ces solutions en fonction de la suite $u^n - v^n$ u, v étant les racines de l'équation caractéristique).
   c) En utilisant finalement que $x_{n+1} = 0$, déduire du résultat précédent les valeurs propres et les espaces propres de M.

10. *classique.* Matrices de Frobenius.

    Soient $(a_0, ..., a_{n-1})$ des elements de $\mathbb{K}$. On considère la matrice
    $$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 & \\ 0 & \cdots . & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

    (a) Démontrer que le polynôme caractéristique de M est $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

    (on peut aussi vérifier que c'est son polynôme minimal).

    (b) Montrer que pour tout réel x la matrice $M - xI$ a un rang supérieur ou égal à $n-1$. (on pourra considérer les $n-1$ premières colonnes).

    (c) Démontrer que la matrice M est diagonalisable si et seu
    lement si toutes les racines du polynôme caractéristique sont simples.

11. Utilisation de matrices compagnon (cet exercice est une application de l'exercice précédent).

    Soit $P = \prod(X - x_i)$ un polynôme à coefficients entiers unitaire de degré n.

    Démontrer que le polynôme $P_k = \prod(X - x_i^k)$ est aussi à coefficients entiers.

    indication : on déterminera une matrice M dont P est le polynôme caractéristique, et on considèrera M^k

12. Calcul de puissances par trois méthodes.

    Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

    Calculer les puissances de A de trois façons différentes

    (a) En diagonalisant A.

    (b) En introduisant $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

    (c) En trouvant un polynôme de degré 2 qui annule A (on calculera aussi A^{-1}).

13. *classique.* Endomorphisme d'espace de matrices (mines)
    Etudier les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $M \mapsto \operatorname{tr}(M)I + M^T$.

14. Endomorphisme d'espace de polynômes.
    Etudier les valeurs propres, vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = X^n P(\frac{1}{X})$.

15. *difficile.* Soit A un polynôme de degré $n+1$. On note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de XP par A. Etudier le noyau, puis la diagonalisabilité de l'endomorphisme f de $\mathbb{C}_n[X]$.

16. *classique.* Soit u un endomorphisme diagonalisable de E.
    Montrer que l'application $f_u : v \to u \circ v$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{L}(E)$.
    à partir d'une base propre de u, construire une base propre de f_u. Un raisonnement matriciel est possible.

17. Endomorphisme de $L(E)$.
    Soit p un projecteur de E (dimension finie). Montrer que l'endomorphisme de $L(E)$ défini par

    $$\varphi : f \mapsto \frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)$$

    est diagonalisable.

    Pour cela on procèdera par l'une des deux méthodes suivantes :
    a) Transformer l'endomorphisme en un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et chercher directement les "matrices propres"
    b) Calculer $\phi \circ \phi$ et $\phi \circ \phi \circ \phi$ et trouver une relation de dépendance entre $\phi \circ \phi$ et $\phi \circ \phi \circ \phi$ et ϕ.

18. *classique. difficile.* Soit u un endomorphisme diagonalisable de E.
    Montrer que l'application $f_u : v \to u \circ v - v \circ u$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{L}(E)$.
    à partir d'une base propre de u, construire une base propre de f_u. Un raisonnement matriciel est possible.

    Utilisation de polynômes annulateurs

19. Soient a, b deux réels distincts, et f, u, v trois endomorphisme d'un ev E vérifiant les conditions : $u + v = Id, au + bv = f, a^2u + b^2v = f^2$.
    Calculer $(f - aI)(f - bI)$ et en déduire que : f est diagonalisable et que u, v sont deux projecteurs .

20. Généralise l'exercice précédent : on suppose qu'il existe des scalaire distincts $a_1, \ldots, a_p$ et des endomorphismes $g_1, \ldots, g_p$ non nuls tels que pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ on ait

    $$f^k = \sum_{i=1}^{p} a_i^k g_i$$

    Montrer que f est diagonalisable et que les g_i sont les projecteurs spectraux de f.

21. Soit A une matrice réelle telle que $A^2 + A + I = 0$.

(a) Etudier la diagonalisabilité de A selon le corps de base.

(b) Calculer le déterminant et la trace de A.(A est une matrice réelle)

22. Matrices de permutation (1).

(a) Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans le corps des complexes, en l'élevant à la puissance n.

(b) Redémontrer le résultat en cherchant l'image par M du vecteur $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ lorsque ω est une racine n ième de l'unité.

23. Matrices de permutation (2)

Montrer que toute matrice de permutation M_σ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. (on montrera qu'il existe un entier k tel que $M_\sigma^k = I_n$.
(*difficile.*) Déterminer le polynôme caractéristique de M_σ en fonction des cycles de σ.

24. Soit F l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui au polynôme P associe $P(X+1)$.

(a) En utilisant cet endomorphisme, démontrer qu'il existe des scalaire $a_0, \dots, a_n$ tels que pour tout polynôme P ont ait $P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$

(b) Plus précisément, déterminer les valeurs propres de F, le polynôme caractéristique de F, et en déduire les coefficients a_k.

25. *classique.* (centrale)
Soit A une matrice complexe telle que A^2 est diagonalisable.

(a) On suppose que A^2 est inversible. En utilisant le polynôme minimal de A^2, montrer que A est aussi diagonalisable.
Désormais on ne suppose plus A inversible.

(b) Montrer en utilisant le polynôme minimal de A^2 que A^3 est diagonalisable.

(c) *difficile.* Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A et A^2 ont le même noyau.

26. (mines) On suppose que A est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$.

(a) Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^2 - 3A + 2I = 0$.

(b) *difficile.* On suppose $A^2 - 3A + 2I \neq 0$ et tr$A = 7$. Déterminer les valeurs possibles de n. Selon les valeurs de n déterminer la dimension de chacun des espaces propres et de chacun des espaces caractéristiques.

Reduction par blocs

27. Produit tensoriel de matrices diagonalisables.

Soit B une matrice diagonalisable et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diagonalisable.

Montrer que $\begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

28. Produit tensoriel (Cas général)
Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_p(\mathbb{C})$ on note $A \bigotimes B \in M_{np}(\mathbb{C})$ la matrice dont une écriture par blocs est $(b_{i,j}A)_{i,j}$.
Vérifier que l'on a $A \bigotimes B . C \bigotimes D = AC \bigotimes BD$.

En déduire que A, B diagonalisables $\Rightarrow A \bigotimes B$ diagonalisable.

29. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$.

   (a) On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable. On pourra utiliser un polynôme annulateur de B.
   (b) Si P est un polynôme annulateur de A, démontrer que le polynôme $(X-1)P$ annule B.
   (c) On suppose que A est diagonalisable et que 1 n'est pas une valeur propre de A. Montrer que B est diagonalisable.
   (d) *difficile.* On suppose que 1 est valeur propre de A, démontrer que B n'est pas diagonalisable.

30. *difficile.* On se propose de déterminer les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels que

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

   est diagonalisable. On suppose donc que c'est le cas

   (a) Démontrer que A est diagonalisable.
   (b) Démontrer qu'il existe une base de diagonalisation de M qui est triangulaire supérieure par blocs.
   (c) En déduire que la CNS cherchée est : A est diagonalisable et il existe C telle que $B = AC - CA$.

31. *classique. difficile.*

   Soit $A \in M_{3n}(K)$ telle que $\text{rg}A = 2n$ et $A^3 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

32. *classique.* Un exemple de matrice sans valeur propres réelles
   Dans cet exercice, on donne un exemple de réduction pour une matrice n'ayant pas de valeurs propres réells.
   On se propose de résoudre l'équation $M^2 = -I$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que n est pair.
   (b) On suppose que $n = 2$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
   indication : on prendra n'importe quel vecteur non nul u et on verifiera que u, Mu est une base de $\mathbb{R}^2$)
   (c) Dans le cas général, montrer M est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont tous $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

33. Resoudre l'équation matricielle $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   indication : On pourra par exemple remarquer que toute solution X commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et que cette matrice est diagonalisable.

Trigonalisation

34. ‘

   En utilisant les propriétés des matrices nilpotentes, montrer que l'équation matricielle $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Redémontrer ce résultat en appliquant à X le théorème de trigonalisation.

35. Soit M une matrice dont les valeurs propres sont des nombres complexes de module 1. Démontrer que $M + M^{-1}$ n'a que des valeurs propres réelles (par exemple en trigonalisant).

36. Trigonalisation (centrale)
   Soit f un endomorphisme d'un ev de dimension 3 tel que $f^2 = f^3$ et $\dim\ker(f - I) = 1$. Montrer que f possède une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base convenable,avec $a = 0$ ou 1

37. Trigonaliser la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

38. (mines)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $2f^3 = 3f^2 - Id$.
   (a) Calculer les puissances de f en fonction de Id, f, f^2. (on pourra utiliser une division euclidienne sur les polynômes).
   Montrer que la suite $\dfrac{f^n}{n}$ converge. Soit g la limite
   (b) On suppose que g est nul. Vérifier que f est diagonalisable.
   (c) On suppose que g est non nul, montrer que f est trigonalisable.
   et qu'il existe une base dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $b = 1$ ou $b = \dfrac{1}{2}$.
   (d) Trouver alors le commutant de f.

Exercices théoriques sur la réduction

39. *difficile.* Soit f, g deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On suppose $f^3 = g^3$. Montrer que $f = g$.

40. *classique.* Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice $n = dimE$.

Déterminer la dimension de $\ker f^k$ pour tout entier k.
Démontrer que les seuls sous espaces stables par f sont les sous espaces $\ker f^k$.

41. *classique.*
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots n\}$ on a tr $A^k = 0$

42. Racine carrée : cas diagonalisable.
Soit M une matrice complexe diagonalisable. démontrer qu'il existe une matrice X telle que $X^2 = M$.

43. Existence de sous espaces stables.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On se propose de montrer qu'il y a toujours une droite ou un plan stable par u.
   (a) Donner une condition pour que u ait une droite stable
   (b) Montrer que dans le cas contraire il existe un polynôme de degré 2 tel que $P(u)$ ne soit pas inversible.
   (c) Montrer que si x est un élément de $\ker P(u)$ le plan engendré par $(x, u(x))$ est stable par u.

44. *classique.* à propos du commutant.

Dans cet exercice de référence le corps de base est $\mathbb{C}$ et E est un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que deux endomorphismes de E qui commutent ont un vecteur propre commun.

45. Le théorème de diagonalisation simultanée :

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.
   (a) Montrer que pour tout λ valeur propre de f l'espace propre $E_\lambda(f)$ est stable par g.
   (b) Montrer qu'il existe une base de $E_\lambda(f)$ formée de vecteurs propres de g
   (c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g ont tous les deux une matrice diagonale.

46. Le théorème de trigonalisation simultanée :

    Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E . On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g ont tous les deux une matrice triangulaire.

    Généraliser à une famille quelconque d'endomorphismes qui commutent.

47. Commutant et polynômes en A : cas diagonalisable.

    Soit A une matrice diagonalisable.
    Calculer la dimension de l'algèbre des matrices qui commutent à A.
    A quelle condition est elle égale à l'algèbre des polynômes en A ?

48. Sous espaces stables dans le cas diagonalisable.
    E est un espace vectoriel de dimension finie.
    (a) Soit f un endomorphisme diagonalisable. Montrer que tout sous espace stable est somme directes de sous espaces des espaces propres.
    (b) Dans ce cas, à quelle condition les sous espaces stables sont ils en nombre fini ?

49. *difficile.* A propos des multiplicités
    Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie.
    Soit λ une valeur propre. Montrer l'équivalence des affirmations suivantes.

    — Les espaces $\ker(f - \lambda I)$ et $\mathrm{Im}(f - \lambda I)$ sont en somme directe.
    — $\ker(f - \lambda I) = \ker(f - \lambda I)^2$
    — λ est racine simple du polynôme minimal de f
    — $\ker(f - \lambda I)$ est de dimension m_λ

50. *difficile.* Endomorphismes semi-simples
    Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie. On dit que f est semi simple s'il possède la propriété suivante :
    Tout sous espace stable par f posséde un supplémentaire stable par f.
    Montrer que f est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable.

51. *classique.* Localisation des valeurs propres :
    Cet exercice est incontournable.
    (a) Lemme de Hadamard.
    Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée à coefficients complexes. On note
    $$r_i = |a_{ii}|$$
    et
    $$d_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| .$$
    En considérant le système linéaire $AX = 0$, montrer que si pour tout i on a $r_i > d_i$ alors A est inversible.

    (b) Montrer que les valeurs propres de A sont situées dans la réunion des disques $D_i$du plan complexe de centre a_{ii} et de rayon d_i
    (disques de Gershgorin)

52. *classique.* Matrices stochastiques (Cachan)

    cet exercice utilise le précédent.

    Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les $a_{i,j}$ sont dans $\mathbb{R}^+$ et que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

    Montrer que toutes les valeurs propres sont de modules inférieur ou égal à 1.

53. Polynôme minimal ponctuel.
Soit E de dimension finie, π son polynôme minimal.

(a) Montrer que pour tout x dans E l'ensemble

$$I(x) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On note π_x son générateur unitaire (il divise clairement π). C'est le polynôme minimal ponctuel de f en x.

(b) Soit P un facteur irréductible de π et a sa multiplicité . Montrer qu'il existe y tel que P^a divise π_y, puis qu'il existe y tel que $P^a = \pi_y$

(c) Soient x, y tels que π_x et π_y soient premiers entre eux. Calculer π_{x+y}

(d) Montrer qu'il existe x tel que $\pi_x = \pi$

54. Racine carrée. Cas général. Cet exercice utilise la réduction en sous espaces caractéristiques.

(a) Soit N une matrice nilpotente et P un polynôme de valuation 1. Montrer qu'il existe une matrice nilpotente M telle que $P(M) = N$. (on cherchera M comme un polynôme en N)

(b) Montrer que toute matrice complexe inversible possède une racine carrée.

55. Soit M une matrice complexe on suppose que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de module 1. On note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $m_{i,j}^{(n)}$ le coefficient d'indice i, j de M^n.

a) Montrer qu'il existe une constante C majorant tous les $|m_{i,j}^{(n)}|$

b) réciproquement, montrer que si M est une matrice inversible telle qu'existe une constante C majorant tous les $|m_{i,j}^{(n)}|$ pour $n \in \mathbb{Z}$ alors les valeurs propres de M sont de module 1 et M est diagonalisable.