Espaces vectoriels normés (première partie)

Dans l'ensemble du chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Normes et distances

Le but de ce paragraphe est d'introduire un objet qui généralise la valeur absolue (le module) à des espaces vectoriels plus généraux.

I.1 Définition

Définition

Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que N est une norme si elle vérifie les axiomes suivants :
- $\forall\, x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (positivité)
- $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Si tous les points sont vérifiés sauf la séparation, on parle de semi-norme.

Remarque. La définition entraîne immédiatement l'inégalité triangulaire généralisée :

$$\forall\, (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ \forall\, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ N\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| N(x_i)$$

Les notations usuelles pour les normes sont $N, \|, \|$.

Le couple (E, N) lorsque N est une norme sur E est appelé un espace vectoriel normé.

Définition

On dit d'un vecteur x qu'il est unitaire lorsque sa norme vaut 1.

Si x est un vecteur non nul, le vecteur $\frac{x}{N(x)}$ est unitaire.

Une droite réelle contient deux vecteurs unitaires alors que dans le cas complexe elle en contient une infinité.

I.2 Normes de références

Un certain nombre de normes seront utilisées tout au long du chapitre et plus généralement, du cours d'analyse : il faut les connaitre :

Normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Lorsque l'espace vectoriel E est le corps de base, la norme est toujours la valeur absolue (ou le module)

Les normes infinies (ou normes sup)

Proposition

On appelle normes infinies ou norme sup des deux normes suivantes :

a) Dans $E = \mathbb{K}^n$. Pour un vecteur $x = (x_1, ..., x_n)$:

$$\|x\|_\infty = \sup |x_i|$$

b)Dans l'espace E des fonctions bornée de X dans $\mathbb{K}$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Ce sont bien des normes **(preuve à connaître)** :

Les normes 1 (ou norme de la convergence en moyenne)

Proposition

On appelle normes 1 les deux normes suivantes :

a) Dans $E = \mathbb{K}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ dans E,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

b) Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Remarque. Si f n'est que continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $\|\cdot\|_1$ n'est qu'une semi-norme (elle ne vérifie pas l'axiome de séparation).
La norme 1 peut aussi être définie sur les espaces de polynômes, ou des sous espaces de l'espace $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$

Norme 2 (ou norme euclidienne)

Une catégorie importante de normes provient du théorème suivant

Proposition

Dès qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est muni d'un **produit scalaire** noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, l'application qui a $x \in E$ associe $\sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une **norme**, que l'on dit induite du produit scalaire sur E.

Un tel espace vectoriel réel s'appelle un espace **préhilpertien.**

Exemple. Les normes classique de ce type sont :

$E=\mathbb{R}^n$. Pour $x=(x_1,...,x_n)$ dans E, on note

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$E=\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. Pour f dans E, on note :

$$\|f\|_2=\left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Dans le cas d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel les mêmes applications sont des normes sous réserve de mettre un module : .

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|f\|_2=\left(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Stratégies pour montrer qu'on a une norme

En général, les normes rencontrées sont de l'un des trois types précédents. Sur les 4 axiomes à vérifier, il est rare qu'il y en ait plus d'un qui soit difficile.
Par exemple pour les norme infinies, il faut être soigneux dans la rédaction de l'inégalité triangulaire.
Pour les normes faisant intervenir des intégrales il importe que f soit **continue** pour l'axiome de séparation.
Les plus délicates sont les normes 2 : si l'on soupçonne qu'une normes est euclidienne, la méthode consiste à trouver le produit scalaire dont elle dérive :

Exemple. On se place sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$ définit une norme.
Même question avec $N(f)=|f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$

Autres normes

Il existe de nombreuses autres normes. Par exemple, lorsque p est un réel au moins égal à 1, sur $E=\mathbb{K}^n$, pour $x=(x_1,...,x_n)$ dans E, on note $\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$. Si f est une fonction de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, on note :

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

On peut montrer (ceci sera vu en exercice) que l'on définit bien ainsi des normes.

I.3 Sous espace d'un espace normé

Proposition

Soit (E, N) un EVN, et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de N à F est encore une norme, appelée norme induite. On dit que le couple $(F, \widetilde{N})$ est un sous-espace vectoriel normé de (E, N).

par exemple, la norme 1 intégrale est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ vérifions le :

I.4 Produit de deux EVN

On considère deux EVN (E, N_E) et (F, N_F). On pose sur $E \times F$ la norme :

$$N(x, y) = \max(N_E(x), N_F(y))$$

On vérifie aisément qu'elle possède les propriétés voulues.
La norme ainsi définie s'appelle la norme produit.
Par exemple, la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$ est

I.5 Distance associée à une norme

.

Définition

Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

- $d(x, y) \geqslant 0$
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

(E, d) s'appelle un espace métrique.

Visualisation d'une distance et de l'inégalité triangulaire :

Proposition

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On définit $d(x, y) = N(x - y)$ pour x et y dans E. Alors d est une distance sur E, appelée distance induite par la norme N.

Remarque. Ceci signifie que les espaces vectoriels normés sont des cas particuliers d'espace métrique.s La notion de distance est importante pour visualiser les objets manipulés.

II Propriétés générales des espaces normés

II.1 Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Définition

Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$. On pose :

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) < r\} \text{ (la boule ouverte de centre } x_0 \text{ et de rayon } r)$$

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) \leqslant r\} \text{ (la boule fermée de centre } x_0 \text{ et de rayon } r)$$

$$S(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) = r\} \text{ (la sphère de centre } x_0 \text{ et de rayon } r)$$

En utilisant la norme, ceci s'écrit de façon équivalente

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ N(x - x_0) < r\}$$

Proposition

Dans un espace normé, les boules ouvertes sont convexes, et se déduisent les unes des autres par translations des centres et homothéties des rayons.

Attention : les boules et sphères **dépendent de la norme choisie !**

Exemples en dimension 2 pour les normes usuelles

II.2 Parties bornées

Définition

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est bornée si :

$$\exists M > 0,\, \forall x \in A,\, N(x) \leq M$$

cela équivaut à dire que A est **inclus dans une boule de centre O.**
Ou encore plus simplement à **inclus dans une boule quelconque**
Les boules et les sphères sont des exemples de parties bornées.

Attention : contrairement, à l'intuition, la notion de partie bornée (et la constante M) dépend de la norme choisie.Ainsi, il faut toujours mentionner la norme en cas de doute, et on parlera de **partie bornée pour** N

Exemples :
Montrer que l'ensemble $\{(x, y), x^4 + 3y^6 = 4\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme 1 et pour la norme infinie.

Montrer que dans $C^0([a, b])$ la boule unité de la norme infinie est bornée pour la norme 1.

II.3 Applications lipschitziennes

Définition

Soient $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est K-lipschitzienne lorsque :

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y))\|_F \leqslant K\|x - y\|_E$$

On retourve ainsi la définition déjà connue dans le cas des fonctions réelles. Noter qu'à nouveau cette notion **dépend des normes choisies**.

Voici quelques exemples de cette situation. D'abord un rappel :

Proposition

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. f est lipschitzienne de rapport $K = \|f'\|_{\infty,[a,b]}$.

Proposition (interpétation de l'inégalité triangulaire :)

La norme est une application 1 lipschitzienne par rapport à elle même :

Voici enfin un exemple très classique, bien que hors programme.

Proposition (distance à une partie)

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $A \subset E$, avec $A \neq \emptyset$. On pose $d(x, A) = \inf\{d(x, y),\ y \in A\}$. Alors l'application ϕ définie ci-dessous est 1-lipschitzienne :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array} \right.$$

Proposition : la fonction distance à une partie est 1 lipschitzienne.

III Suites dans un EVN

III.1 Définitions

La définition est analogue au cas des suites numériques.

Définition

Une suite d'un espace normé (E, N) est une application de $\mathcal{N}$ dans E

On parlera, selon le cas, de suite de vecteurs, de matrices, de fonctions, de polynômes.....
Les paragraphes qui suivent permettent de généraliser certaines propriétés des suites numériques aux suites des ENV.

III.2 Suite bornée

Définition

une suite (u_n) d'un espace vectoriel normé (E, N) est bornée si :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, N(u_n) \leq M$$

Dans une partie bornée, toutes les suites sont bornées. Plus intéressante est la réciproque :

Proposition

pour qu'une partie A soit non bornée il faut et il suffit qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que $N(u_n) \to +\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

Exemples

III.3 Définition générale de la convergence des suites

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u_n tend vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|$ (noté $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \ell$) lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_0,\ \|u_n - \ell\|) \leqslant \epsilon$$

Il est important, dans le cas des espaces vectoriels normé de toujours garder à l'esprit que la convergence des suites dépend de la norme choisie. C'est pourquoi la notation choisie dans ce cours (même si elle n'est pas officielle) mentionne la norme. Il est conseillé de toujours l'utiliser.

Notons tout de suite le fait suivant :

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \ell$

la suite réelle positive $\|u_n - l\|$ tend vers 0.

L'intérêt remarquable de cette définition est de ramener l'étude de la convergence des suites dans un evn quelconque E à celle de la suite de réels positifs $\|u_n - l\|$. Il en résulte que la majorité des propriétés vues pour les suites numérique reste vraie.

III.4 Propriétés

Proposition

— Une suite qui converge admet exactement une limite.
— Toute suite convergente est bornée.
— Une suite qui converge admet exactement une valeur d'adhérence.(une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge).
— Linéarité : Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Remarque. On perd certaines propriétés des suites réelles :

— Le produit et l'inverse de limites (à cause en général de l'absence de ces lois dans E)

— Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas vrai dans un espace normé quelconque.

III.5 Convergence dans un espace produit

Proposition

On considère deux EVN $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$.
on munit l'espace $E \times F$ de la norme (appelée norme produit) :
$\|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$, on a l'équivalence :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} (x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_E} x \\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_F} y \end{cases}$$

Corollaire

On se place dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
Un suite est convergente si et seulement si chacune de ses composantes converge. La limite est le vecteur des limites de composantes.

Plus généralement, dans un espace de dimension finie. Si la norme choisie est la norme infinie dans une base B, alors la convergence de la suite (u_n) est éuivalente à la convergence de chacune des suites coordonnées.

On parle de **convergence coordonnée par coordonnée.**

Exemple. Dans $\mathbb{R}_3[X]$muni de la norme infinie dans la base canonique, étudier la convergence de la suite

$$P_n = (X-1)(X-a_n)(X-b_n)$$

où $(a_n)_n$ et (b_n) sont deux suites convergentes.

Dans $\mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$ muni de la norme infinie, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Un grand classique : Étudier la convergence de la suite de matrices :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & -{}^a\!/_n \\ {}^a\!/_n & 1 \end{pmatrix}^n$$

III.6 Influence de la norme

Il est important de noter que sur un même espace vectoriel les notions de convergence définies par deux normes différentes sont en général différentes.
L'exemple suivant est a bien comprendre :

Exemple. On considère la suite de fonctions $f_n : x \in [0,1[\longmapsto x^n$. Étudier la convergence de la suite (f_n) vers la fonction nulle, pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

IV Comparaison de normes

IV.1 Définitions

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est plus fine que N_2 lorsque :

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, x \in E,\ N_2(x) \leqslant K N_1(x)$$

Définition

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes lorsque :
- N_1 est plus fine que N_2
- N_2 est plus fine que N_1

Autrement dit les normes N_1 et N_2 sont équivalentes lorsque :

$$\exists\, K > 0,\ K' > 0,\ \forall\, x \in E,\ K N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant K' N_1(x)$$

L'équivalence des normes est bien sur une relation d'équivalence.

IV.2 Comparaisons des normes classiques

Les démonstrations de ce paragraphes doivent être connues.

Régle méthodologique

Pour montrer que N_1 est plus finie que N_2 on cherche une constante K telle que la fonction $x \mapsto \frac{N_2(x)}{N_1(x)}$ soit bornée par K.

Normes sur $\mathbb{K}^n$

Proposition

Les trois normes classiques sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes

Comparaison des normes classiques sur $C^0[a,b],\mathbb{R})$

Proposition

Sur $\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$, la norme infinie est plus fine que la norme 1.

Proposition

Sur $\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$, la norme 2 est plus fine que la norme 1.

Nous allons maintenant montrer que ces normes ne sont pas équivalentes :

Régle méthodologique
Pour montrer que N' n'est pas plus fine que N, il faut montrer que $\frac{N}{N'}$ n'est pas majoré.
On cherche donc **une suite** (x_n) **telle que** $\frac{N}{N'}(x_n)$ **tende vers l'infini.**

IV.3 Deux Caractérisation

Proposition

Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes parties bornées

On dispose également de la caractérisation séquentielle suivante :

Proposition

Deux normes sont équivalentes N et N'si et seulement si elles définissent les même suites convergentes :

$$\forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, \forall l \in E, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} \ell \Longleftrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N'} \ell$$

IV.4 Vocabulaire de la convergence dans l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

Comme les normes classiques ne sont pas équivalentes dans cet espace vectoriel, les suites convergentes ne sont pas les mêmes. Pour cette raison nous introduisons dès maintenant deux termes de vocabulaire qui seront très utilisés par la suite.

Définition

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

— On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f sur $[a,b]$ lorsque elle converge pour la norme infinie : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}$ tend vers 0.

— On dit que (f_n) **converge en moyenne** vers f sur $[a,b]$ lorsqu'elle converge pour la norme 1 :$\|f_n - f\|_{1,[a,b]}$ tend vers 0.

Proposition

La convergence uniforme implique la convergence en moyenne et la réciproque est fausse.

V Cas de la dimension finie

V.1 Equivalence des normes

Le théorème majeur de cette section et probablement de tout ce chapitre est le suivant :

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Ce théorème est admis.

V.2 Conséquences

- En dimension finie, il n'existe qu'une seule notion de partie bornée (plus besoin de préciser la norme).

- En dimension finie il n'existe qu'une seule notion de convergence.

En particulier :

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit (u_n) une suite de E. Il est équivalent de dire :

i. (u_n) converge
ii. il existe une base de E dans laquelle la suite (u_n) converge coordonnée par coordonnée
iii. dans toute base de E, la suite (u_n) converge coordonnée par coordonnée

Un exemple :
dans l'espace $\mathbb{R}_d[X]$, On considère une suite de polynômes unitaires de degré d (P_n) qui converge vers un polynôme P. Montrer que P est unitaire. Quelle est la limite de la suite $P_n(1)$?

Peux on donner les mêmes conclusions si cette fois ci P_n est une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec P_n unitaire de degré n ?

V.3 Complétude des EVN en dimension finie. Series absolument convergentes

Soit (E, N) un espace normé.
Soit (u_n) une suite de E.Comme pour les suites numériques, on dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente.

Par exemple :

Définition

Soit (E, N) un espace normé.
Soit (u_n) une suite de E.
On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum N(u_n)$ est convergente.

intéret : il s'agit d'une série de nombrres réels positifs....c'est bien plus facile !

Par exemple, considérons la suite de matrices $U_n = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ Alors la série $\sum U_n$ est absolument convergente.

Théorème

Dans un espace de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente

Vocabulaire (HP) :On dit que les espaces de dimension finie sont **complets**.
Démonstration.

Reprenons notre exemple.

V.4 Le théorème de Bolzano Weierstrass en dimension finie

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.

Ce résultat n'est pas vrai en dimension infinie. Par exemple, prenons dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme sup des coefficients, la suite $(X^n)_n$.