Topologie-Espaces normés

Un peu d'histoire : Descartes (1596-1650). L'apport de Descartes, esprit universel, aux sciences en général est avant tout d'ordre philosophique et méthodologique. Contemporain de Galilée, il partage avec lui l'idée devenue aujourd'hui banale, mais qui était à l'époque révolutionnaire voire sacrilège, que les phénomènes physiques sont régis par des lois mathématiques, et rêve d'étendre la rigueur du savoir mathématique à l'ensemble des savoirs. C'est le but de la fameuse « méthode »cartésienne. Parallèlement, sa philosophie s'efforce de réduire l'antagonisme qui éloigne la science et la religion et de concilier l'existence de dieu et l'existence de lois scientifiques. Son apport est donc un passage essentiel vers la naissance d'une science indépendante. Sur le plan strictement mathématique, on lui doit la géométrie analytique (introduction des repères, des coordonnées, des équations des courbes etc....) qui va permettre par la suite l'apparition des fonctions et du calcul infinitésimal de Newton et Leibniz.

Normes

Normes explicites.

1. Déterminer la condition sur les réels a, b, c pour que l'application $N((x, y) = a|x| + b|y| + c|xy|$ soit une norme sur $\mathbb{R}^2$

2. 3 normes matricielles
   (a) Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$ les trois applications suivantes
   $$N_1(A) = \sup |a_{i,j}| \, , N_2(A) = \sup_i(\sum_j |a_{i,j}|), N_3(A) = \sup_j(\sum_i |a_{i,j}|)$$
   sont des normes.
   (b) Déterminer des constantes telles que $N_1 \leq \alpha N_2 \leq \beta N_3 \leq \gamma N_1$

3. Soit a un réel positif.
   a) Montrer que $N_a(f) = \displaystyle\int_0^1 |f'(t) - af(t)|dt$ est une norme sur $\{f \in C^1[0,1], f(0) = 0\}$.
   b) Etablir l'inégalité $|f(x)|e^{-ax} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-at}|f'(t) - af(t)|dt$. En déduire que N_a est plus fine que la norme infinie.
   c) On pose $f_n(x) = \sin(nx)e^{ax}$. Déterminer la limite de $N_a(f_n)$ quand n tend vers l'infini. En déduire que N_a n' est pas équivalente à la norme infinie.

4. Sur $C^1([0,1], \mathbb{R})$ on pose
   $$||f|| = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$
   a) Montrer que l'on définit ainsi une norme : on pourra vérifier que l'application
   $$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$
   est un produit scalaire.
   b) En utilisant l'égalité $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz, trouver une constante C telle que l'on ait pour toute fonction f l'inégalité $\|f\|_\infty \leq C||f||$.

   c) En utilisant une suite de fonctions (f_n) judicieuse, montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes.

5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^1 sur $[0,1]$. On note
   $$N(f) = ||f||_\infty + \sup |f'(x)|$$
   Vérifier que N est une norme et la comparer à la norme infinie.

6. (centrale)

   (a) On pose $N(x,y) = \sup\limits_{[0,1]} \dfrac{|x+ty|}{1+t}$. Montrer que c'est une norme sur $\mathbb{R}^2$

   (b) Trouver des constantes de comparaison à la norme 1.

7. (X) .

   On définit sur $\{f \in C^2[0,1], f(0) = f'(0) = 0\}$ l'application N par $N(f) = ||f + 2f' + f"||_\infty$.

   (a) Montrer qu'on définit ainsi une norme.

   (b) (utilise des équations différentielles). Montrer que cette norme est plus fine que la norme infinie, et trouver la meilleure constante de comparaison.

8. a) Soit a un réel. Montrer que

$$\Phi : \begin{array}{ccc} R[X] & \mapsto & R \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(a)| \end{array}$$

   est bien défini et est une norme.

   b) En déduire qu'il existe un réel K tel que pour tout polynôme de degré 2 on ait

$$|\int_0^1 P(t)dt| \leq K(|P(a)| + |P'(a)| + |P''(a)|)$$

   c) Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup |a_k|$. On définit ainsi une nouvelle norme sur $\mathbb{K}[X]$. Est elle équivalente à la précédente ?

   Propriétés générales des normes.

9. Montrer que deux normes sont égales si et seulement si elles ont la même boule unité fermée.

10. Normes multiplicatives

    Montrer qu'il existe une matrice non nulle $A \in M_n(K)$ qui est semblable à $2A$ (on cherchera une matrice nilpotente simple)
    Existe t'il une norme sur $M_n(K)$ telle que $\|PM\| = \|MP\|$ pour toute matrice M et toute matrice inversible P?

11. Semi-normes multiplicatives.

    Soit N une semi norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant pour tout A, B $N(AB) = N(BA)$

    (a) Démontrer que $N(B) = 0 \Rightarrow \forall A, N(A+B) = N(A)$

    (b) Calculer $N(E_{i,j})$ pour $i \neq j$.

    (c) Montrer qu'il existe λ tel que pour tout A on ait $N(A) = \lambda|\operatorname{tr} A|$

12. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $N_A(P) = \sup\limits_{x \in A} |P(x)|$.

    a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit défini et soit une norme.
    b) *difficile.* Soient $A \subset [0,1]$ $B = [0,1]$. Montrer que N_A et N_B sont équivalentes si et seulement si elles sont égales. Que penser alors de l'ensemble A ?

13. Normes strictes (difficile).

    On dit qu'une norme N est stricte si deux vecteurs unitaires distincts vérifient $N(x+y) < N(x) + N(y)$.

    (a) Démontrer qu'une norme est stricte si et seulement si la sphére unité ne contient pas de segments non réduits à un point. (on pourra considérer l'application $t \to N(tx+y)$ et vérifier qu'elle est convexe).

    (b) Parmi les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{C}^0([a,b])$, lesquelles sont strictes ?

14. *classique. Caractérisation des normes euclidiennes.*

    (a) Montrer qu'une norme euclidienne vérifie l'identité du parallélogramme : $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.
    On souhaite montrer la réciproque : Soit $\|\|$ une norme quelconque sur E vérifiant cette identité. on pose $\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left(-\|x-y\|^2+\|x+y\|^2\right)$.

    (b) Montrer que $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ et que $\varphi(x,x)>0$ pour tout x non nul.

    (c) Montrer que $x\to\varphi(x,y)$ est continue

    (d) Etablir $\varphi(x+y,z)+\varphi(x-y,z)=2\varphi(x,z)$ puis $\varphi(2x,z)=2\varphi(x,z)$ puis $\varphi(x+y,z)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in E^3$

    (e) Montrer $\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)$ pour λ entier, puis rationnel puis enfin pour tout λ

    (f) Montrer que φ est un produit sclaire et conclure

15. *classique. difficile. Jauge d'un convexe.*

    (a) E désigne un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension finie. On considère une norme N quelconque sur E et on note C la boule unité fermée : $C=\{x,N(x)\leq 1\}$. Montrer que C possède les propriétés suivantes :

        i. C est convexe et borné
        ii. C est fermé
        iii. C contient une boule ouverte de centre O
        iv. C est symétrique par rapport à l'origine.

    (b) Dans la suite on considère un sous ensemble C de E ayant les 4 propriétés définies çi-dessus. On pose $\|x\|=\inf\{\lambda>0,\frac{x}{\lambda}\in C\}$. Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E (pour l'inégalité triangulaire, on pourra remarquer que $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}=\frac{x+y}{\lambda+\mu}$).

    (c) Montrer quel'ensemble C est la boule unité fermée de $\|\|$.

Suites dans un EVN

16. Proche du cours :
    Démontrer les résultats suivants dans un EVN quelconque

    (a) Le théorème de Cesàro

    (b) Si (a_n) est une suite de réels convergente et si x_n est une suite de vecteurs convergente, alors la suite a_nx_n est convergente.

    (c) Si deux suites de vecteurs sont colinéaires et convergentes alors leurs limites sont colinéaires.

17. *classique.* Déterminer la limite de la suite de matrices $\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{-a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$.

18. On considère une suite de fonctions dans $C([-1,1],\mathbb{R})$ définie par les conditions suivantes :
    f_n est impaire
    $fn(x)=nx$ si $x\in[0,\frac{1}{n}]$
    $f_n(x)=1$ si $x\in[\frac{1}{n},1]$.

    (a) On souhaite démontrer que cette suite diverge pour la norme infinie.
    Montrer que si f_n converge vers g pour la norme infinie, alors on a pour tout x, $f_n(x)\to f(x)$ quand x tend vers l'infini.
    En déduire que g n'est pas continue et conclure.

    (b) On souhaite montrer que cette suite diverge pour la norme 1. Pour cela on suppose le contraire et on note h la limite.
    Montrer que pour tout $\varepsilon>0$ on a $\int_\varepsilon^1|f_n(t)-h(t)|dt\leq\|f_n-h\|$
    En déduire la valeur de $\int_\varepsilon^1|1-h(t)|dt$ et conclure.

19. *difficile.* Soit P un polynôme quelconque. Démontrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_n$ converge vers P.

Suites de matrices

Il est conseillé de faire ces exercices dans l'ordre. on admettra qu'il existe des normes d'algèbre sur l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

20. Produit de suites de matrices convergentes. Changement de base.
    On suppose que les suites de matrices (A_n) et (B_n) sont convergentes de limites A, B. Démontrer que la suite A_nB_n converge vers AB.
    on forcera l'apparition de $A - A_n$ et $B - B_N$ dans l'expression $A_nB_n - AB$

    Démontrer que pour toute matrice inversible P, la matrice PA_nP^{-1} converge vers PAP^{-1}

21. Suite géométrique matricielle
    Soit A une matrice fixée. On note $u_n = A^n$
    (a) Montrer que si la suite de matrices $(u_n)_n$ est convergente, alors la limite L est une matrice de projecteur qui commute avec A. *On considèrera les suites extraites (A^{2n}) et (A^{n+1})*
    (b) Lorsque la matrice A est diagonalisable, déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n converge, en fonction du spectre de A.
    (c) On revient au cas général et on suppose la suite $(u_n)_n$ convergente. Démontrer que l'image de L est le noyau de $A - I$ et que le noyau de L est l'image de $A - I$.

22. Convergence de la série géométrique matricielle. On suppose que $\|A\| < 1$ (la norme choisie est une norme d'algèbre)
    (a) Démontrer que la série de terme général A^k est convergente.
    (b) Déterminer la limite quand p tend vers l'infini de $(I_n - A)(\sum_{k=0}^{p} A^k)$
    (c) En déduire que $I_n - A$ est inversible, ainsi que la somme de la série des A^k.

23. *difficile.* Soit A une matrice dont tous les termes sont strictement positifs et telle que pour tout i on a $\sum_j a_{i,j} = 1$. On note α le plus petit des coefficients.
    Pour tout vecteur X on note $m(X)$ et $M(X)$ sa plus petite et sa plus grande coordonnée.
    On fixe un vecteur X à coordonnées positives ou nulles.
    (a) Démontrer que les suites $m(A^pX)$ et $M(A^pX)$ sont adjacentes.
    (b) Démontrer que la suite (A^p) converge vers une matrice de rang 1.

24. *classique.* Soit E de dimension finie.
    Soit u un endomorphisme de E tel que pour tout x, $||u(x)|| \leq ||x||$).

    a)Montrer que $\mathrm{Im}(u - I) \bigoplus \ker(u - I) = E$. *on calculera pour x dans l'intersection , la limite de la suite* $\frac{1}{n+1}\sum_0^n u^k(x)$

    b) Montrer que la suite $\frac{1}{n+1}\sum_0^n u^k$ converge vers le projecteur associé à la somme directe précédente.

Questions de densité

25. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$
    (a) Démontrer que l'ensemble des polynômes de degré n est une partie dense.
    (b) Démontrer que l'ensemble des polynômes ayant n racines distinctes est dense dans l'ensemble des polynômes scindés.

26. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables. Qu'en déduit on si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

27. Soit $E = l^1(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des séries absolument convergentes, muni de la norme $||u|| = \sum_0^\infty |u_n|$.
    Soit G le sous espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que G est dense dans E.

    Soit l^∞ l'espace des suites bornées. Cet espace est muni de la norme infinie. l^1 est un sous espace vectoriel de l^∞. Est il dense ?