

Théorèmes d'interversion

Les intégrales sont écrites par rapport à une variable t sur un intervalle I . L'éventuelle autre variable, notée x , appartient à un intervalle J . Les hypothèses faibles ne sont pas indiquées. Par exemple, $t \mapsto f(x, t) \in \text{CM}(I, \mathbb{K})$ et $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$ pour le th. de continuité d'une intégrale à paramètre. « Domination locale possible » signifie qu'on peut se contenter de $\forall [a, b] \subset J, \exists \varphi_{a,b} \in L^1(I, \mathbb{R}_+), \forall t \in I, \forall x \in [a, b], |\dots(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$. Les hypothèses de convergence uniforme peuvent résulter de la convergence normale.

Conclusion	Nom	Hypothèse forte	Remarques
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right) = \int_I \lim_n f_n(t) dt$	Convergence dominée	$ f_n(t) \leq \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Vérifier que $f = \lim_n f_n \in \text{CM}(I, \mathbb{K})$
$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$	Intégration terme à terme positif (Beppo Levi)	$f_n(t) \geq 0$	Valable dans $[0, +\infty]$ (cas divergent aussi)
$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$	Intégration terme à terme sur un int. qq.	$\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(t) dt$ converge	Si l'hypothèse forte n'est pas vérifiée, appliquer la ligne suivante
$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$	Convergence dominée pour les s. partielles.	$ S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) \leq \varphi(t)$ où φ int. sur I	Utile pour les séries alt. ou géom.
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$	Intégration d'une limite uniforme	(f_n) CVU vers f sur $[a, b]$	Valable seulement sur un segment
$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n(t) dt$	Intégration terme à terme sur un segment	$\sum_{n \geq 0} f_n$ CVU sur $[a, b]$	Valable seulement sur un segment
$\lim_{x \rightarrow b} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \lim_{x \rightarrow b} f(x, t) dt$	Limite d'une intégrale à paramètre ou convergence dominée pour un paramètre réel	$ f(x, t) \leq \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Il faut la domination sur un intervalle $[c, b[$ b peut être infini
$x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur J	Cont. d'une intég. à paramètre sur un int. qq.	$ f(x, t) \leq \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Domination locale possible
$\frac{d^n}{dx^n} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt, n \in \mathbb{N}^*$	Formule de Leibniz (int. qq.) de classe $\mathcal{C}^n(\mathcal{C}^\infty)$	$\left \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right \leq \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Domination locale possible. $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ intégrable Extension à la classe \mathcal{C}^∞ en dominant (localement) toutes les dérivées
$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f$ est continue sur I	Continuité d'une limite uniforme	(f_n) CVU vers f	CVU sur I ou sur tout segment de I
$\lim_{t \rightarrow b} f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow b} f_n(t) \right)$.	Théorème de la double limite	$(f_n)_n$ CVU vers f	Il faut la CVU sur un intervalle $[c, b[$ b peut être infini
$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)} \quad k \in \mathbb{N}^*$	Classe $\mathcal{C}^k(\mathcal{C}^\infty)$ d'une lim. de suite de fonctions	La dernière suite dérivée $(f_n^{(k)})$ CVU	Possibilité de CVU sur tout segment de I Les suites $(f_n^{(j)})$ CVS pour $0 \leq j \leq k-1$ Extension à la classe \mathcal{C}^∞ (avec CVU de toutes les dérivées)
$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I	Cont. de la somme d'une sér. de f.	$\sum_{n \geq 0} f_n$ CVU	CVU sur I ou sur tout segment de I
$\lim_{t \rightarrow b} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow b} f_n(t)$	Théorème de la double limite	$\sum_{n \geq 0} f_n$ CVU	Il faut la CVU sur un intervalle $[a, b[$ b peut être infini
$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$	Dérivation terme à terme de classe $\mathcal{C}^k(\mathcal{C}^\infty)$	La dernière série dérivée $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ CVU	Possibilité de CVU sur tout segment de I Les séries $\sum f_n^{(j)}$ CVS pour $0 \leq j \leq k-1$ Extension à la classe \mathcal{C}^∞ (avec CVU de toutes les dérivées)
$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$	Dérivation t. à t. des sér. ent.	aucune	Valable sur $] -R, R[$
$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right]_{x_0}^x$	Intégration t. à t. des sér. ent.	aucune	C'est faux sur le segment $[-R, R]$. Il faut que x_0 et x soient dans $] -R, R[$
$\lim_{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$	Convergence radiale d'Abel	La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge	Même résultat en $-R$