# Espaces vectoriels normés (2)
# Topologie

Dans l'ensemble du chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $E$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## I Continuité

### I.1 Définitions générales

**Définition**

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et$(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$. On considère

$$f : \left| \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Soit $x_0 \in A$. On dit que $f$ est continue en $x_0$ si lorsque :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in a,\ \|x - x_0\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leqslant \epsilon$$

### I.2 Propriétés de base

- noter que ce sont exactement les mêmes définitions que dans le cas réel en remplaçant valeur absolue par norme.

**Proposition**

la continuité est une propriété topologique, elle est invariante par changement de norme équivalente comme l'énonce la propriété qui suit. En particulier, en dimension finie, il n'y aura pas lieu de préciser la norme choisie.

**Démonstration.**

### I.3 Propriétés de base

**Proposition (linéarité)**

Soit $f, g : A \subset E \longrightarrow F$, soit $x_0 \in A$. Si $f$ et $g$ sont continues en $x_0$ il en est de même de $f + \lambda g$ pour tout scalaire $\lambda$.

**Proposition (caractérisation séquentielle)**

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, soit $x_0 \in A$. Il est équivalent de dire :

i. $f$ est continue en $x_0$

ii. Pour toute suite $(x_n)$ qui converge vers $x_0$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.

**Proposition (composition)**

Soient $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $g : B \subset F \longrightarrow G$. On suppose que $f(A) \subset B$. Soit $x_0 \in \overline{A}$. On suppose que $f$ continue en $x_0$ en $x_0$, et $g$ continue en $f(x_0)$. Alors, $g \circ f$ est continue en $x_0$.

**Démonstration.** La preuve de ces trois propositions est analogue à celle des fonctions de la variable réelles vue en première année. Il suffit de remplacer le symbole "valeur absolue" par "norme".

### I.4 Lien avec les applications lipschitziennes et uniformément continues.

**Applications lipschitziennes**

**Définition**

On dit que $f$ est uniformément continue sur $E$ lorsque :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

**Proposition**

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, et toute fonction uniformément continue est continue.

**Démonstration.**

Les réciproques sont fausses, comme le prouvent les exemples suivants qu'il est conseillé de connaître :

la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sans être lipschitzienne.

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sans être uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

## I.5 Applications continues remarquables

**Les applications linéaires en dimension finie**

**Proposition**

Soir $f \in L(E, F)$ une application **linéaire.**
On suppose que $E$ est de **dimension finie**.
Alors $f$ est lipschitzienne ( donc continue)

Le résultat n'est pas forcément vrai lorsque $E$ est de dimension infinie. Nous étudierons ce point en fin de chapitre.

**Démonstration**

En conséquence, on a le résultat suivant :

**Les formes linéaires coordonnées dans une base de $E$**

**Proposition (continuité des formes linéaires coordonnées)**

Soit $B$ une base de $E$ de dimension finie. si l'on note $x_i$ la coordonnées de $x$ selon $e_i$ alors la forme linéraire coordonnée $e_i^* : E \longrightarrow F : x \mapsto x_i$ est continue.

En composant ces résultats on obtient le théorème suivant :

**Les fonctions continues des coordonnées.**

**Proposition**

Si $E$ et $F$ sont de dimensions finie, soit $f : E \to F : x \mapsto f(x)$ . On suppose que les composantes de $f$ s'obtiennent par composition de fonctions élémentaires continues à partir des coordonnées de $x$ dans une base $B$. Alors $f$ est continue.

En particulier les fonctions qui sont **polynomiales en les coordonnées** sont continues.

### I.6 Cas ou l'espace d'arrivée est de dimension finie.

Si $F$ est de dimension finie l'étude de la continuité est facilitée grace au résultat suivant :

**Proposition ( comtinuité des compostante, ou coordonnées dans l'espace d'arrivée)**

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ . Soit $f : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}^n$. On écrit

$$f(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_n(\overrightarrow{x}))$$

Les applications $f_i$ s'appellent les coordonnées ou composante de $f$. Alors $f$ est continue si et seulement si toutes les $f_i$ sont continues.

Ceci est une conséquance immédiate de la convergence coordonnée par coordonnée.
En pratique, elle permet de se ramener au cas ou la fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

### I.7 Exemples de référence

A titre d'application voici quelques exemples classiques de fonction continues sur $M_n(\mathbb{K})$.

— L'application det est une fonction continue sur $M_n(\mathbb{K})$

— Le changement de base.

— L'inversion $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longmapsto M^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ est continue.

### I.8 Dépendance vis à vis de la norme

En dimension quelconque, la continuité dépend fortement du choix de la norme. Il faudra toujours préciser. Voici un exemples de référence à retenir pour illustrer cette situation.

- Etudier la continuité de l'application $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) \mapsto f(0)$ pour les normes classiques.

# II Topologie des espaces vectoriels normés

Cette partie se propose de définir les concepts permettant l'étude approfondie des parties d'un espace normé. Ces nouveaux objets sont difficiles à comprendre. Afin de mieux les assimiler il est conseillé de faire de nombreux dessins.

On se place dans $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

## II.1 Voisinages d'un point dans $(E, \|\cdot\|)$

**Définition**

Soit $x_0 \in E$. Soit $V$ une partie de $E$ contenant $x_0$. On dit que $V$ est un voisinage de $x_0$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x_0, \epsilon) \subset V$.

**Proposition**

Si $V$ est un voisinage de $x_0$, alors toute partie contenant $V$ est également un voisinage de $x_0$.

Si $V_1$ et $V_2$ sont des voisinages de $x_0$, alors $V_1 \cap V_2$ l'est aussi.

**Remarque :** Le résultat s'étend sans peine à l'intersection d'une famille finie de voisinages. En revanche, c'est faux en général pour une famille infinie, comme le prouve l'exemple suivant.

## II.2 Ouverts de $(E, \|\cdot\|)$

**Définition**

On appelle ouvert de $E$ toute partie $\Omega \subset E$ ayant la propriété suivante :

$$\forall\, x \in \Omega,\ \Omega \text{ est un voisinage de } x$$

Pour comprendre cette définition, étudions les premiers exemples suivants :

### Premiers exemples d'ouverts

**Proposition**

Les boules ouvertes de $E$ sont des ouverts.

Dans le cas $E = \mathbb{R}$ les intervalles $]a, b[, ]a, \infty[, ] - \infty, b[$ sont des ouverts.

**Propriétés des ouverts :**

**Proposition**

-$E$ et $\emptyset$ sont des ouverts.
-la réunion d'une famille **quelconque** d'ouverts est un ouvert
-L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est un ouvert.

**Définition**

L'ensemble des ouverts de $E$ s'appelle la topologie de l'EVN $(E, \|\cdot\|)$ ( à priori, il faut préciser norme considérée)

Exercice de cours : démontrer la caracatérisation suivante des ouverts :
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\Omega$ est un ouvert
- $\Omega$ est une réunion de boules ouvertes

## II.3 Parties fermées d'un espace vectoriel normé

**Définition**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, soit $F$ une partie de $E$.
On dit que $F$ est un fermé lorsque $E \backslash F$ est un ouvert.

Les fermés sont les complémentaires des ouverts.

**Proposition**

Les axiomes des fermés sont :
- $E$ est fermé
- $\emptyset$ est fermé
- Toute intersection de fermés est fermée
- Toute réunion finie de fermés est fermée

**Démonstration.**

**Remarque.** Attention, **fermé n'est pas le contraire d'ouvert**. En général une partie $A$ n'est ni fermée ni ouverte. Elle peut aussi être ouverte et fermée en même temps !

## II.4 Points adhérents, points isolés

Pour prouver qu'une partie est fermée on dispose d'une première stratégie : prendre son complémentaire et prouver qu'il est ouvert. Cette méthode peut s'avérer très inefficace. On développe ici un autre outil plus efficace.

**Définition (deux caractérisations équivalentes des points adhérents)**

Soit $A \subset E$. soit $x \in E$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

i. $\forall \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

ii. $\exists\,(x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \longrightarrow x$

Si $x$ vérifie l'une d'elle on dit que $x$ est un point **adhérent** à $A$

**Définition**

On appelle **adhérence** d'une partie $A$, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à $A$.

La démonstration doit être connue.

**Exemples :**

- La borne supérieure d'une partie bornée de $\mathbb{R}$ est un point adhérent.
- Les points adhérents à $\mathbb{Z}$.
- Les points adhérents à $B(0, 1)$.

**Définition (points isolés)**

Soit $(E, d)$ un espace métrique. Soit $A \subset E$. On dit que $x \in A$ est isolé dans $A$ lorsqu'il n'est pas dans l'adhérence de $A \backslash \{x\}$.

Illustration géométrique :

**Propriétés élementaires**

— $E$ et $\emptyset$ sont égaux à leur adhérence.
— $A \subset \overline{A}$ pour toute partie $A$ de $E$
— l'adhérence est croissante : si $A$ et $B$ sont des parties de $E$ on a : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

Le théorème suivant donne la propriété fondamentale de l'adhérence qui sera très utile dans l'ensemble du chapitre.

**Théorème (caractérisation topologique de l'adhérence)**

Soit $A$ une partie de $E$.

— $\overline{A}$ est un fermé
— $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$
— $A$ est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$

**Démonstration.**

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème (caractérisation séquentielle des fermés)**

Soit $F$ une partie de $E$. Il est équivalent de dire :

i. $F$ est fermé
ii. $F$ contient tous ses points adhérents
iii. pour toute suite convergente$(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ , la limite de la suite $(u_n)$ appartient à $F$

**Méthode pratique**

Pour montrer par caractérisation séquentielle qu'une partie $F$ est fermée on procède de la façon suivante.
On prend un point adhérent $a$.
Par définition, $a$ est la limite d'une suite $(u_n)$ de $F$.
En utilisant que $u_n$ est dans $F$, on prouve que $a \in F$.

**Exemples** Montrons les résultats suivants :

**Proposition**

- Les boules fermées et les sphères sont des fermés.
- les singletons sont des fermés
- les ensembles finis sont des fermés
- $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$
- Les intervalles suivants $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

## II.5 Influence de la norme

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant :

**Proposition**

Soit $E$ un EVN. Soient $N$ et $N'$ deux normes équivalentes sur $E$. Alors les topologies définies par ces deux normes sont égales.
En particulier : dans un espace vectoriel de dimension finie, la notion d'ouvert (de fermé) ne dépend pas de la norme choisie.

**Démonstration.**

**Un exemple non trivial de fermé** : A titre d'exemple de ces notions démontrons le (difficile) résultat général suivant :
*Soit $U = (u_n)$ une suite de $E$. L'ensemble $Adh(U)$ des valeurs d'adhérence de la suite $U$ est un toujours un fermé de $E$.*

## II.6 Points intérieurs

**Définition**

Soit $A$ une partie non vide de $E$. On dit que $x \in A$ est intérieur à $A$ si $A$ est un voisinage de $x$. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à $A$.

Cette notion est duale de la précédente. Dire que $x$ est intérieur à $A$ c'est dire qu'il n'est pas adhérent au complémentaire de $A$.

**Proposition**

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

- $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans $A$
- $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$
- $A$ est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A$

**Démonstration.**

**Exemples**

Trouver l'adhérence, l'intérieur de :

a) les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $\mathbb{Q}$, $[0,1] \cup \{2\}$.
b) Une boule fermée en dimension finie.
c) L'ensemble des polynômes unitaires tels que $P(1) = 3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
d) L'ensemble des fonction nulles en zéro pour la norme 1

## II.7 Frontière

**Définition**

Soit $A \subset E$. On appelle frontière de $A$ l'ensemble $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$.

**Proposition**

La frontière de $A$ est un fermé.

## II.8 Densité

Les définitions sur la densité se reformulent de la façon suivante :

**Définition**

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. On dit que $A$ est dense dans $B$ si $B \subset \overline{A}$.

Rappelons que les exemples suivants doivent être connus :

**Proposition**

-$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.

-$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

## II.9 Illustration de la dépendance vis à vis de la norme en dimension infinie

En dimension quelconque un même ensemble peut avoir des propriétés différentes selon la norme choisie.
On pose $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. $f$ est-il fermé pour $\|\cdot\|_1$ ? pour $\|\cdot\|_\infty$ ? Quelle est son adhérence ?

## II.10 Topologie relative

Cette section est plus difficile et peut être passée dans un premier temps.

**Proposition**

Soit A une partie de $E$ ( qui n'est pas forcément un sous espace vectoriel).

Soit $\Omega$ une partie de $A$. On dit que c'est un ouvert relatif de $A$ si il existe $O$ un ouvert de $E$ tel que $\Omega = O \cap F$.

De même on appelle fermé relatif de $A$ toute partie de $A$ de la forme $A \cap F$ ou $F$ est un fermé de $E$.

Les ouverts et fermés relatifs ont les mêmes propriétés que les ouverst et fermés ( réunion, intersection, voisinages, caractérisation séquentielle) il suffit de restreindre les éléments $x$ considérés à l'ensemble $A$ et les démonstrations sont analogues. Donnons en une pour l'exemple :

Toute intersection de fermés relatifs de $A$ est un fermé relatif de $A$

Noter que les ouverts (resp fermés) relatifs, ne sont pas forcément ouverts ou fermés **dans E**.
Par exemple :

**Définition**

La topologie constituée par les ouverts relatifs s'appelle topologie induite ou topologie relative.

## II.11 Continuité et topologie

Le théorème qui suit est important. Il montre que les applications continues sont en quelque sorte les "morphismes pour la topologie"

**Théorème**

Soient $E$ et $E'$ deux espaces normés. Soit $f : E \longrightarrow E'$.
On suppose que $f$ est continue, alors

i. pour tout $\Omega'$ ouvert de $E'$, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $E$

ii. pour tout $F'$ fermé de $E'$, $f^{-1}(F')$ est un fermé de $E$

Remarque : on peut aussi montrer (ce n'est pas difficile mais HP) que la réciproque est vraie : toute application vérifiant l'axiome *i.* ou l'axiome *ii.* est continue.

**Corollaire**

: la proposition suivante est importante dans la pratique

**Proposition**

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Fixons $c \in \mathbb{R}$. Alors :

— $\{x \in E,\ f(x) = c\}$ est un fermé de $E$
— $\{x \in E,\ f(x) \geqslant c\}$ est un fermé de $E$
— $\{x \in E,\ f(x) > c\}$ est un ouvert de $E$

## II.12 Applications

**Retrouvons quelques résultats connus**

### Applications aux matrices

**Proposition**

$Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert.
$Sl_n(\mathbb{K})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des fermés. *On rappelle que* $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) M^T M = I_n\}$

**Démonstration.**

### Topologie des sous-espaces vectoriels

**Proposition**

Tous les sous espaces vectoriels d'un espace de dimension finie sont fermés.
Plus généralement, tout SEV de **dimension finie** d'un espace vectoriel quelconque est fermé.

Les espaces vectoriels de dimension infinie ne sont pas toujours fermés (ils peuvent même être denses !!).
En revanche, voici trois autres résultats topologiques sur les espaces vectoriels qui sont toujours vrais ( preuve en exercice).

— l'adhérence d'un SEV est toujours un SEV
— Un SEV est toujours d'intérieur vide ( sauf $E$ lui même)
— Un SEV est toujours non bornée ( sauf $\{0\}$).

## II.13 Continuité et densité

**Proposition**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur une partie $A$ de $E$. On suppose qu'il existe $B$ une partie dense dans $A$ telle que pour tout $x \in B$, $f(x) = g(x)$. Alors $f$ et $g$ coïncident sur $A$.

**Démonstration.**

**Exemple.**

- Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

- (classique) Démontrer que les matrices $AB$ et $BA$ ont toujours le même polynôme caractéristique.

# III Continuité des applications linéaires et multilinéaires

## III.1 Le théorème de caractérisation

**Proposition**

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $f$ est continue sur $E$
ii. $f$ est continue en 0
iii. $f$ est lipschitzienne
iv. $f$ est bornée sur la boule unité fermée
v. $f$ est bornée sur la sphère unité
vi. $\exists\, k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$

Il n'est pas nécessaire de toutes les retenir : les plus importantes sont *i* et *vi*. Il faut aussi savoir que toute application linéaire continue est forcément lipschitzienne. Il faut aussi retenir l'idée générale de la démonstration qui est de se ramener à des vecteurs de norme 1 par homogénéité des applications linéaires.

On rappelle qu'on a vu en particulier que :

**Théorème**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $E$ est de dimension finie. Alors $f$ est continue.

### Etude d'un exemple en dimension infinie

etudions la continuité de l'application linéaire $f \mapsto f(0)$ sur l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}$ pour différentes normes.

## III.2 Norme triple d'une application linéaire continue

**l'espace $\mathcal{L}_C(E, F)$**

On note $\mathcal{L}_C(E, F)$ l'ensemble des application linéaire **continues** de $E$ dans $F$. Il est immédiat que c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ ( et qu'il lui est égal si $E$ est de dimension finie)

**Définition**

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On pose $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Alors on a aussi $|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$

De plus $f$ est $|||f|||$ lipschitzienne.

$|||f|||$ est appelé norme triple de $f$, ou norme d'opérateur de $f$.

la terminologie norme d'opérateur vient du résultat suivant :

**Proposition**

$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

De plus, pour tout $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $|||f \circ g||| \leqslant |||f|||\, |||g|||$, et $|||\mathrm{id}||| = 1$.
(autrement dit, $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre)

Voici deux exemples de calcul de norme triple (en dimension finie ou infinie).

## III.3 Continuité des applications multilinéaires

**Proposition**

Soient $E_1, ..., E_n$ et $G$ des ensembles munis de normes. Soit $B$ une application linéaire définie ainsi :

$$B : \left| \begin{array}{lcl} E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & G \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & B(x_1, ..., x_n) \end{array} \right.$$

Alors il est équivalent de dire :

i. $B$ est continue

ii. il existe $K > 0$ tel que pour tout $(x_1, ..., x_n)$, $\|B(x_1, ..., x_n)\| \leqslant K\|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|$

La démonstration est essentiellement analogue à celle du cas linéaire et n'est pas détaillée.

**Corollaire**

Si les $E_i$ sont de dimensions finies, alors $B$ est continue.

**Exemples :**
-Le produit matriciel est continu.

-L'application determinant est continue (comme fonction de ses colonnes). On en déduit l'existence d'une constante $C$ telle que :

-Si la norme sur $E$ provient d'un produit scalaire, alors le produit scalaire est une application continue.

# IV Compacité

**Définition**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soit $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est compacte toute suite de $A$ possède une valeur d'adhérence dans $A$.

La compacité permet la traduction dans les espaces normés du théorème de Bolzano-Weierstrass (rappelons que ce théorème n'est pas vrai en toute généralité dasn un EVN).

## IV.1 Propriétés générales

**Proposition**

Tout compact est fermé et borné.

**Proposition (fermés d'un compact)**

Soit $K$ un compact. Soit $F \subset K$ un fermé. Alors $F$ est compact.

**Proposition (produit de compacts)**

Soient $K_1, ..., K_p$ des compacts. Alors $K_1 \times \cdots \times K_p$ est compact.

La preuve de ce résultat est analogue à celle du théorème de Bolzano Weierstrass dans le cas des suites complexes (extractions successives).

**Proposition (suites dans un compact)**

Soit $K$ un compact. Soit $(u_n)$ une suite de $K$.
La suite $(u_n)$ converge si et seulement si elle n'a qu'une valeur d'adhérence.

La preuve de ce résultat est analogue à celle faite dans le cas des suites réelles bornées et ne sera pas reprise.

## IV.2 Compacité d'un EVN de dimension finie

En dimension finie, on a l'important résultat suivant :

**Théorème**

Soit $E$ un espace-vectoriel normé de dimension finie. Soit $K \subset E$. Alors $K$ est compact si et seulement si $K$ est fermé et borné.

Ce théorème est faux dans les espaces de dimension infinie.

## IV.3 Exemples

**Quelques parties de $\mathbb{R}$ qui sont compactes**

Les segments, les unions finies de segments, l'ensemble de Cantor, sont des compacts de $\mathbb{R}$.

**Quelques parties des EVN de dimension finie qui sont compactes.**

Dans $\mathbb{K}^n$, les boules fermées et les sphères sont des compacts.

Montrer que l'enselbke $D = \{(x, y)x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$ est un compact du plan.

**Dans** $M_n(\mathbb{R})$

l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Remarque.** En dimension infinie, il faut faire attention .
Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum a_k X^k\right\| = \sup |a_k|$ , la sphere unité est fermée bornée mais n'est pas compacte !

## IV.4 Compacité et continuité

Les deux théorèmes de cette sections sont très importants et justifient l'importance de la compacité.

**Théorème**

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

**Démonstration.**

**Corollaire (théorème des bornes atteintes)**

Soit $(E, d)$ un EVN et $K$ un compact de $E$. Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, x_0 \in K,\ f(x_0) = \sup f(x) = \max f(x)$$

$$\exists\, x_1 \in K,\ f(x_1) = \inf f(x) = \min f(x)$$

**Théorème (Heine)**

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

## IV.5 Exemples d'application

Les théorèmes précédents sont très utilisés, en particulier pour montrer l'existence d'objets mathématiques. En voici quelques illustrations.

**Proposition**

Soient $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(x) < 1$. Montrer qu'il exisste un réel $a < 1$ tel que $f(x) \leq a$ pour tout $x$. Ceci serait il vrai si on remplace $[0,1]$ par $[0,1[$ ?

**Proposition**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$, et de limites finies en $\pm\infty$. Alors $f$ est bornée.

**Proposition**

Soit $F$ un fermé de $E$ de dimension finie. Alors $F$ admet un élément de norme minimale.

**Définition**

Soit $E$ un espace de dimension finie. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f$ est coercive lorsque $f(x)$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini.

**Proposition**

Toute fonction coercive continue sur $E$ admet un minimum.

**Proposition**

Soit $K_1$ et $K_2$ deux compacts disjoints. Alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

**Proposition**

En dimension finie, les constantes de comparaison de normes sont atteintes. La norme triple d'une application continue est atteinte.

# V Connexité par arcs

## V.1 Definitions

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé et $A$ est une partie de $E$.

**Définition**

Soit $A$ une partie de $E$ et $(a, b) \in A^2$. On appelle arc reliant $a$ et $b$ toute application continue $\phi : [0, 1] \longrightarrow A$ telle que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$.

**Illustration géométrique**

**Définition**

On dit que $A$ est connexe par arcs (en abrégé CPA) lorsque :

$$\forall (a, b) \in E^2, \text{ il existe un arc } \phi \text{ d'extrémités } a \text{ et } b$$

**Illustration géométrique**

**Exemples**

$E$ et $\emptyset$ sont connexes par arcs.

Dans un EVN quelconque, les parties convexes sont connexes par arcs (la réciproque est fausse).

(Important) Dans $\mathbb{R}$, les parties connexes par arcs sont les intervalles.

Deux exemples de parties connexes par arcs et non convexes : $\mathbb{C}^*$ et les ensembles étoilés.

## V.2 Connexité par arcs et continuité

**Théorème**

L'image d'un connexe par arcs par un application continue est connexe par arcs.

**Démonstration.**

**Remarque.** Il s'agit d'une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires. Ce théorème permet surtout de démontrer des résultats de non existence de certains objets.

Exemples d'utilisation :

-Le complémentaire d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ n'est pas connexe par arcs.

-$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

- Montrer que $\mathbb{U}$ et $[0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.

**Proposition**

Soit $f$ une application continue sur une partie connexe par arcs et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors $f$ est constante.

**Exemple.** Le rang n'est pas une application continue.