

Topologie(2)

Continuité

1. Soit E un espace normé et $f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$.
 - (a) Démontrer que f est une bijection continue de E sur sa boule unité.
 - (b) Démontrer que f^{-1} est continue.
 - (c) Démontrer que f est lipschitzienne, mais pas f^{-1} .
2. (a) Montrer que le maximum de deux (resp. un nombre fini de) fonctions continues à valeurs réelles est une fonction continue.
 (b) Montrer que le résultat tombe en défaut avec une famille infinie (même si le maximum existe).
3. On munit l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ de la norme uniforme.
 Montrer que l'application $f \mapsto \inf_{t \in [0, 1]} f(t)$ est continue.

Continuité uniforme

4. Soit f une fonction concave positive sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f est uniformément continue.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x^2$ n'est pas uniformément continue.
6. *classique.* Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe des constantes a, b telles que $|f(x)| \leq a|x| + b$.
7. Module de continuité uniforme.
 Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. On pose, pour tout $\delta \geq 0$,

$$v(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

v s'appelle le module de continuité uniforme de f

- (a) Montrer que la fonction v est définie, que v est continue en 0, croissante, nulle en 0.
 Montrer que $v(x+y) \leq v(x) + v(y)$, puis que v est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
- (b) Réciproquement, toute fonction vérifiant les conditions de la question précédente est le module de continuité d'une fonction uniformément continue.
8. *classique. difficile.*
 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0$. On suppose f uniformément continue. Montrer que $f(x) \rightarrow 0$ quand x tend vers l'infini.

9. Equations fonctionnelles.

Pour chacune des équations fonctionnelles suivantes trouver les fonctions f continues solution.

- (a) *classique.* $f(x) = f(3x + 1)$.
- (b) $f(x + y) = f(x)f(y)$
- (c) $f(x - y)f(x + y) = f(x)^2 f(y)^2$
- (d) *difficile.* $f(x^2) - f(x) = k$. (ici f est continue sur $]1, +\infty[$)

10. Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans lui-même telles que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe x tel que $f(x) = g(x)$.
indication : en supposant le contraire, étudier la suite des itérées par g d'un point fixe de f .
11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f^3 = Id$ (la puissance est pour la composition). Montrer que $f = Id$.
12. Soit f une fonction continue de $]0, 1[$ dans lui-même surjective non injective. Montrer qu'il existe un élément x ayant au moins 3 antécédents par f .
13. Soit f continue vérifiant $f(0) = f(1) + 1$. Montrer que pour tout entier p il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{p}) + \frac{1}{p}$.
14. Continuité du polynôme caractéristique :
 Montrer que l'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.
15. Non continuité du polynôme minimal :
 L'application qui à une matrice associe son polynôme minimal n'est pas continue. On pourra par exemple considérer la suite de matrices $M_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
16. Continuité du polynôme interpolateur :
 On note Ω l'ensemble des n -uplets de points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ dont les x_i sont distincts. Montrer que l'application qui à un élément de Ω associe le polynôme d'interpolation en ces n points est une application continue de Ω dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
17. Continuité de l'inverse :
 Nous avons vu en cours que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$. On le redémontre en utilisant les propriétés des normes d'algèbre. La norme considérée ici est donc une norme d'algèbre.

- (a) Montrer que pour $\|H\| < 1$ la matrice $I + H$ est inversible et que $\|(I + H)^{-1} - I\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|}$ (on utilisera la série géométrique $\sum H^n$).
- (b) Soit M_0 une matrice inversible. En utilisant la matrice $H = MM_0^{-1} - I_n$, montrer que si M est proche de M_0 elle est inversible, et majorer $\|M^{-1} - M_0^{-1}\|$. En déduire la continuité du passage à l'inverse.

Ouverts fermés

Exercices explicites :

18. Déterminer si les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont ouvertes, fermées ou ni l'un ni l'autre.
- (a) $\{(x, y), 0 < |x + 1| < 1\}$ (c) $\{(x, y), |x| < 1, |y| \leq 1\}$
 (b) $\{(x, y), 0 \leq x \leq y\}$ (d) $\{(x, y), x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
19. Déterminer si les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont ouvertes, fermées ou ni l'un ni l'autre.
- (a) $\mathbb{N}$ (d) $[1, +\infty[$ (f) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ (h) $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$
 (b) $[0, 1[$ (e) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ (g) $\{\frac{p}{2^n}, p, n \in \mathbb{N}\}$
 (c) $[1, 2] \cup \{3\}$
20. L'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ étant muni de la norme 1 ou de la norme infinie étudier le caractère ouvert ou fermé des sous ensembles suivants :
- (a) $\{f \in E, f(1) > 0\}$ (c) $\{f \in E, \forall x, f(x) > 0\}$ (e) $\{f \in E, f \text{ est croissante}\}$
 (b) $\{f \in E, \int_0^{1/2} f(t)dt < 1\}$ (d) $\{f \in E, \forall x, f(x) \geq 0\}$

21. (a) Soit P un polynôme unitaire de degré n scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout complexe z on a $|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$.
 (b) Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.
 (c) Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

Ouverts fermés adhérence intérieur : exercices théoriques

22. Comparer en toute généralité les ensembles

$$(a) \overline{A \cup B} \text{ et } \overline{A} \cup \overline{B} \quad (b) \overline{A \cap B} \text{ et } \overline{A} \cap \overline{B} \quad (c) (A \overset{\circ}{\cap} B) \text{ et } \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \quad (d) (A \overset{\circ}{\cup} B) \text{ et } \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$$

23. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Quelle est l'adhérence de $A \times B$ dans $\mathbb{R}^2$? Quel est son intérieur?

24. Soient A et B deux parties ouvertes et denses dans un evn E .

- (a) Soit $x \in E$. Montrer que toute boule ouverte de centre x contient une boule ouverte incluse dans A .
 (b) En déduire que $A \cap B$ est encore dense dans E .
 (c) Démontrer que la réunion de deux fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

25. Soit (u_n) une suite réelle convergente de limite l . Démontrer que l'adhérence de l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est $A \cup \{l\}$.

26. Topologie des sous espaces vectoriels.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- (a) Montrer qu'un sous espace vectoriel strict est toujours d'intérieur vide.
indication : montrer que toute boule ouverte contient une base de E
 (b) Montrer dans le cas général que l'adhérence d'un sev est un sev. Montrer qu'un hyperplan est toujours fermé ou dense. Donner un exemple de chaque situation.
 (c) Montrer que la réunion de deux fermés d'intérieur vide est un fermé d'intérieur vide (voir exercice 24). En déduire qu'un espace de dimension finie n'est pas une réunion finie de sous espaces stricts.

27. (Mines) Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, N une norme sur E et $A = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

- (a) Montrer que A est soit fermé soit dense dans (E, N) .
 (b) Donner un exemple de norme N_1 tel que A soit fermé dans (E, N_1) , puis un exemple de norme N_2 tel que A soit dense dans (E, N_2) .

28. Théorème de séparation des fermés

- (a) Soit F un fermé de E ne contenant pas zéro. Montrer que $d(F, 0)$ est non nulle.
 (b) Soient A et B deux fermés disjoints. Est-il vrai que $d(A, B) \neq 0$?
 (c) En considérant la fonction continue $x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U, V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

29. *classique. difficile.* Valeurs d'adhérence d'une suite.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace métrique E, d . On pose

$$A_n = \{u_p, p > n\}$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de U est égal à $\bigcap_n \overline{A_n}$.

En déduire que cet ensemble est toujours un fermé.

30. Tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts.

Soit A une partie fermée d'un espace vectoriel E normé par N . On pose $A_n = \{x, d(x, A) < 1/n\}$.

Démontrer que A_n est ouvert.

Montrer que A est l'intersection de tous les A_n (ainsi tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts).

Continuité et topologie

31. Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue. pour toute partie A de E comparer, $f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)}$.

32. Trouver des contreexemples aux affirmations suivantes :

l'image continue d'un fermé est un fermé

L'image continue d'un ouvert est un ouvert.

33. *difficile*. Soit P un polynôme.

On suppose que (u_n) est une suite complexe telle que $(P(u_n))$ est bornée. Montrer que (u_n) est bornée.

Montrer que l'image par P d'une partie fermée de C est fermée.

34. *difficile*.

On suppose que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue injective telle que l'image de tout fermé est fermée. Montrer que l'image réciproque de tout compact est compacte.

Généraliser en remplaçant l'hypothèse d'injectivité par : l'image réciproque de chaque singleton est bornée.

Propriétés topologiques de $M_n(\mathbb{K})$.

La plupart des exercices de cette section utilisent la réduction des endomorphismes.

35. Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé.

36. Montrer que l'ensemble des projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie est un fermé non borné et non connexe par arcs.

37. Matrices de Markov. On appelle matrice de Markov toute matrice dont les coefficients sont positifs ou nuls et telle que la somme des terme dans chaque ligne soit égale à 1. Etudier les propriétés topologiques de l'ensemble des matrices de Markov.

38. Le théorème de Cayley Hamilton par topologie.

a) Montrer que l'ensemble D des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

b) Démontrer que pour toute matrice M diagonalisable on a $\chi_M(M) = 0$ (sans utiliser le théorème de Cayley Hamilton)

c) Dédire des deux questions précédentes le théorème de Cayley Hamilton.

39. Topologie des classes de similitudes (1).

Soit A une matrice telle que $A^2 = I_n$.

Montrer qu'une matrice B est semblable à A si et seulement si $B^2 = I_n$ et $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$.

En déduire que la classe de similitude de A est fermée.

40. Topologie des classes de similitude (2)

difficile. Montrer que si A est diagonalisable alors sa classe de similitude est fermée.

41. Topologie des classes de similitude (3)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à aA pour tout réel a non nul. En déduire que la classe de similitude de A n'est pas fermée.

(généraliser le résultat au cas de n'importe quelle matrice nilpotente : on montrera que A est semblable à une matrice dont les coefficients sont arbitrairement petits)

42. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $K = \mathbb{C}$.

On dit qu'un endomorphisme u est cyclique si il existe un vecteur x tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .

(a) Montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques de E est une partie ouverte de $\mathcal{L}(E)$.

indication : utiliser la continuité du déterminant

(b) *difficile*. Montrer que c'est une partie dense dans E .

43. *X difficile*.

Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), u(K) \subset K\}$.

Montrer que A est compact.

En déduire que, pour $u \in A$, $|\det u| \leq 1$.

44. *difficile*. Propriétés topologiques de l^1

(a) Soit $E = l^1(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des séries absolument convergentes, muni de la norme $\|u\| = \sum_0^\infty |u_n|$. L'ensemble

$F = \{u, \sum_0^\infty u_n = 1\}$ est-il fermé ? ouvert ? borné ?

(b) Soit G le sous espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que G est dense dans E .

(c) Soit f une forme linéaire sur E . Montrer que f est continue si et seulement si il existe une suite a_n bornée telle que

$$f(u) = \sum_0^\infty a_n \cdot u_n$$

45. On note l^1 l'espaces des séries absolument convergentes et l^∞ l'espace des suites bornées. l^1 est un sous espace vectoriel de l^∞ . Démontrer qu'il est dense.

Compacité

46. Soit K un compact de la boule unité ouverte de E . Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon $a < 1$ contenant K .

47. Soit f continue sur $[1, 2]$ telle que $f(x) > x$. Montrer qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(x) \geq \alpha x$

48. Soit K un compact et f de K dans lui même telle que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tout $x \neq y$.

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x) - x\|$ possède un minimum

(b) Montrer que f possède un point fixe.

(c) En considérant $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ discuter la nécessité de l'hypothèse de compacité.

49. Diamètre d'un compact.

Soit K un compact. On appelle diamètre de K le réel $\delta(K) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in K\}$

Démontrer que $\delta(K)$ est bien défini.

Montrer qu'il existe $(a, b) \in K^2$ tels que $\delta(K) = \|a - b\|$

50. *difficile*. Isométries d'un compact. Soit K un compact et f de K dans lui même telle que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout x, y .

Montrer que f est injective, puis que tout x est valeur d'adhérence de la suite $(f^n(x))_n$ (ici la puissance est relative à la composition).

En déduire que f est bijective.

51. Un problème de minimisation

Montrer que $\inf \left\{ \int_0^1 |P(t)| dt, P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 1 \right\}$ est un réel strictement positif.

on pourra considérer l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 1\} \cap B(0, 1)$ où $B(0, 1)$ est la boule unité fermée et justifier que cet ensemble est compact.

52. Somme de deux compacts :

Soient A et B deux compacts de E . On pose $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$. Démontrer que $A + B$ est compact.

Si l'on suppose seulement B fermé alors $A + B$ est fermé.

53. Le théorème du graphe fermé :

(a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle graphe de f l'ensemble des couples $(x, f(x))$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si f est continue, alors le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(b) On considère la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f est elle continue ? son graphe est il fermé ?

(c) On considère maintenant une fonction f à valeurs dans un compact dont le graphe est un fermé. Montrer que f est continue.

54. Intersections décroissantes de compacts.

On considère une famille de partie compactes $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non vides et décroissante (c'est à dire que $K_n \subset K_{n-1}$).

Montrer que leur intersection est non vide. indication : prendre pour chaque n un élément x_n dans K_n et montrer que la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence.

55. classique. difficile. Le théorème de Riesz.

Soit E un espace de dimension infinie, et N une norme sur E . Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compacte. On procèdera de la façon suivante :

(a) Tout sev F de dimension finie est fermé dans E , et pour tout $x \in E$, $d(x, F)$ est atteinte en un certain point de F .

(b) On peut construire par récurrence une suite de vecteurs $(e_n)_n$ telle que $N(e_n) = 1$ et $d(e_n, \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})) = 1$

(c) conclure.

56. classique. difficile. Soit K un compact du plan.

Montrer l'existence et l'unicité du disque fermé de rayon minimal contenant K .

57. difficile. (ens) Un exemple de compact en dimension infinie.

Soit $(u_n)_n$ une suite sommable de nombres complexes. On note

$$K = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n u_n, \epsilon_n = \pm 1 \right\}$$

Montrer que K est un compact de $\mathbb{C}$

Applications linéaires continues

On rappelle qu'une application linéaire est continue si et seulement si il existe une constante C telle que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ pour tout x . la norme triple (norme d'opérateur) $\|f\|$ est alors définie comme $\|f\| = \sup \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$. On rappelle aussi que la norme triple est sous multiplicative

58. Un exemple de calcul de norme d'opérateur.

On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme infinie.

On prend

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) soit X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\|X\| = 1$: majorer $\|AX\|$.

(b) Démontrer que $\|A\| = 3$

(c) Que dire du spectre de A ?

(d) Que dire de la suite de matrices $\frac{1}{4^n} A^n$? Que dire de la série de terme général $\frac{1}{4^n} A^n$?

59. (a) Démontrer que la trace est une application linéaire continue.

(b) Calculer sa norme d'opérateur lorsque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme 2.

60. Utilisation de la norme d'opérateur.

Soit N une norme sur $M_n(\mathbb{K})$. Démontrer qu'il existe une constante C telle que pour tout A, B on ait $N(AN) \leq CN(A)N(B)$. On pourra par exemple utiliser une norme d'opérateur.

61. (a) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\|_1 = \sup_k \frac{|a_k|}{k!}$ (où $P = \sum a_k X^k$). Démontrer que l'endomorphisme $P \mapsto P'$ est continu et calculer sa norme d'opérateur

(b) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\|_2 = \sup_k |a_k|$. Démontrer que l'endomorphisme $P \mapsto XP$ est continu et calculer sa norme d'opérateur.

(c) Démontrer que $P \mapsto P'$ n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_2$

(d) Existe-t'il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ rendant continu simultanément les deux endomorphismes précédents ?

indication : on considèrera leur composé qui est l'endomorphisme $P \mapsto XP'$ et on vérifiera que son spectre est non borné

62. Exemple de calcul de norme d'opérateur dans un espace de fonctions.

On munit $E = C^0[0, 1]$ de la norme infinie usuelle. Pour f dans E , on note $\phi(f)$ la fonction

$$x \mapsto \int_0^x (1-t)f(t)dt - \int_x^1 tf(t)dt$$

(a) Montrer que pour tout x on a $|\phi(f)(x)| \leq \|f\|(1/2 + x - x^2)$

(b) En déduire que ϕ est lipschitzienne et majorer $\|\phi\|$

(c) Exhiber une suite (f_n) de fonctions affines par morceaux continues telles que $f_n(x) \rightarrow 1$ sur $]0, 1/2[$ et vers -1 sur $]1/2, 0[$.

(d) En déduire la valeur de $\|\phi\|$

63. Calcul de norme d'opérateur dans un espace de suites.

Etudier la continuité de la forme linéaire $f : (u_n) \rightarrow \lim u_n$ sur l'espace des suites convergentes muni de la norme infinie. Déterminer sa norme subordonnée $\|f\|$

64. Propriété d'une norme d'opérateur dans un espace de dimension finie.

Montrer l'existence d'une constante k telle que pour tout polynôme de degré ≤ 2 on ait $\left| \int_0^1 P(t)dt \right| \leq k(|P(1)| + |P(-1)| + |P(0)|)$.

soit k_0 la plus petite constante k qui convient. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\left| \int_0^1 P(t)dt \right| = k_0(|P(1)| + |P(-1)| + |P(0)|)$

65. Formes linéaires sur l^1

a) Soit b une suite bornée. Montrer que l'application $\phi_b : u \rightarrow \sum u_n b_n$ est une forme linéaire continue sur l^1 .

b) *difficile*. Réciproquement, démontrer que toute forme linéaire continue sur l^1 est de cette forme.

66. *classique. difficile*. Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v - v \circ u = Id$. Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$. En déduire que u et v ne sont pas tous les 2 continus.

67. *classique.* Soit E de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E tel que $\|u\| \leq 1$ (c'est à dire tel que pour tout x , $\|u(x)\| \leq \|x\|$).

a) Montrer que $\text{Im}(u - I) \oplus \ker(u - I) = E$.

Indication : on calculera pour x dans l'intersection, la limite de la suite $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k(x)$

b) Montrer que la suite $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$ converge vers le projecteur associé à la somme directe précédente.

68. *classique. difficile.* Continuité des formes linéaires.

Soit f une forme linéaire sur E . On se propose de montrer que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.

a) Etablir l'implication facile

On suppose que f est une forme linéaire dont le noyau F est fermé.

b) Soit x_0 n'appartenant pas à F . Justifier que $d(x_0, F) \neq 0$. Etablir que pour tout scalaire λ et tout vecteur $z \in F$ on a $d(\lambda x_0 + z, F) = |\lambda| d(x_0, F)$

c) En déduire une majoration, pour un vecteur x quelconque, de $|f(x)|$ en fonction de $\|x\|$ et d'une constante faisant intervenir x_0 . Conclure

Connexité

69. (a) Montrer que $\mathbb{R}$ privé d'un point n'est pas connexe par arcs.

(b) Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe par arcs.

(c) En déduire qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$.

70. Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque polynôme son nombre de racines distinctes.

71. On note U le cercle unité. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe z tel que $f(z) = f(-z)$

72. Le logarithme complexe n'est pas une fonction.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $\exp \circ f = Id$. Supposons pour cela qu'une telle application existe.

(a) Montrer que pour tout x réel il existe un entier k tel que $f(e^{2i\pi x}) = 2i\pi x + k$

(b) démontrer que k ne dépend pas de x (on utilisera un argument de connexité)

(c) En calculant de deux façons $f(1)$ établir une contradiction.

73. *difficile.* (ens)

(a) Montrer que le complémentaire d'une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(a)$ soit une partie bornée. Montrer que f possède un extremum.

74. Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$

On rappelle (pivot de Gauss) que toute matrice carrée inversible s'écrit comme produit de matrices de la forme $I + aE_{i,j}$ ($i \neq j$)

et d'une matrice diagonale de la forme $D_d = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix}$ avec $d = \det A$.

(a) Justifier la connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$. En déduire celle de l'ensemble des matrices D_d .

(b) Construire un arc continu de $[0, 1]$ dans $\mathcal{GL}_n$ qui relie la matrice identité à la matrice $I + aE_{i,j}$.

(c) En déduire la connexité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.