DS2

Exercice

1. – Démontrer que deux matrices semblables, ont le même déterminant, le même rang et la même trace.

2. – On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que ces deux matrices ont le même rang, le même déterminant et la même trace.
En considérant les matrices $A - 2I_3$ et $B - 2I_3$, démontrer que les matrices A et B ne sont pas semblables.

3. – On donne les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer, en utilisant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3), que ces deux matrices sont semblables.

Problème : Factorisation LU et applications

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_n$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. $\mathcal{GL}_n$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de . $\mathcal{M}_n$ On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ qui sont triangulaires supérieures et dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls. On note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ qui sont triangulaires inférieures et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n$, et pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note A_k la sous-matrice obtenue en garndant les k premières lignes, et les k premières colonnes de A : $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$. On pose $\Delta_k(A) = \det A_k$. Ces déterminants sont appelés les mineurs principaux de A.

I. Factorisation LU

1. – Démontrer que les ensembles $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{L}_n$ sont des sous-groupes multiplicatifs de $\mathcal{GL}_n$, c'est à dire qu'ils sont stables par produit et par passage à l'inverse.

2. – Déterminer $\mathcal{U}_n \cap \mathcal{L}_n$.

3. – Soient (L, L') deux matrices de $\mathcal{L}_n$ et (U, U') deux matrices de $\mathcal{U}_n$. On suppose que $LU = L'U'$. Démontrer en utilisant les questions précédentes que $L = L'$ et $U = U'$.

4. – Soit $A \in \mathcal{M}_n$. On suppose qu'il existe un couple $(L, U) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ tel que $A = LU$.

a. A l'aide d'un calcul par blocs, démontrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a l'égalité $A_k = L_k U_k$.

b. En déduire que pour tout k on a $\Delta_k(A) \neq 0$ et exprimer les coefficients diagonaux de U en fonctions des déterminants $\Delta_1(A), \ldots, \Delta_n(A)$.

5. – Soit $A \in \mathcal{M}_n$. On suppose réciproquement que pour tout k on a $\Delta_k(A) \neq 0$. On se propose de démontrer par récurrence qu'il existe un couple $(L, U) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ tel que $A = LU$.

a. Traiter le cas $n = 1$.

b. On suppose le résultat proposé vrai pour $n - 1$. Il existe donc des matrices L_{n-1} et U_{n-1} dans $\mathcal{L}_{n-1} \times \mathcal{U}_{n-1}$ telles que $A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$. On écrit $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & L \\ C & a_{n,n} \end{pmatrix}$ où C (resp. L) est une colonne (resp. une ligne) de taille $n - 1$.
Déterminer des matrices L et U ayant une décomposition par blocs de la même forme et qui vérifient $A = LU$ puis conclure.

On a donc prouvé le théorème suivant :

Une matrice A possède une factorisation $A = LU$ avec $(L, U) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls. De plus en cas d'existence, cette factorisation est unique.

II.Exemples et applications

6. − Premier exemple :
On considère la matrice A dont le terme général est égal à $a_{i,j} = \min(i, j)$

a. Soit U une matrice de $\mathcal{U}_n$. Vérifier que le terme général de la matrice $B = U^T U$ est égal à

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} u_{k,i} u_{k,j}$$

b. En déduire la décomposition LU de la matrice A. Combien vaut $\det A$?

7. − Un second exemple :

a. Démontrer la formule de Vandermonde :

$$\binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p}{i} \binom{q}{k-i}$$

(avec la convention que $\binom{n}{k}$ est nul si $k < 0$ ou $k > n$)
On pourra par exemple développer de deux façons différentes le polynôme $(1 + X)^p (1 + X)^q$

b. En déduire la décomposition LU de la matrice de terme général $a_{i,j} = \binom{p+j-1}{i-1}$.

8. − Le cas symétrique.
Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On suppose que la A est une matrice symétrique, et que tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

a. Soit $A = LU$ la factorisation L, U de A. Démontrer que la matrice U s'écrit de façon unique sous la forme $U = DU'$ où D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs et U' a tous ses coefficents diagonaux égaux à 1.

b. En déduire que $A = LDL^T$.

c. Etablir enfin qu'il existe une unique matrice $P \in \mathcal{U}_n$ à coefficient diagonaux strictement positifs telle que

$$A = P^T P$$

(cette décomposition s'appelle la décomposition de Cholesky).

III. Le cas tridiagonal.

Dans cette partie la matrice A est tridiagonale, c'est a dire de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

On pose pour simplifier, $\delta_k = \Delta_k(A)$ avec la convention $\delta_0 = 1$.

9. – Calculer δ_1, puis exprimer δ_k en fonction de δ_{k-1} et δ_{k-2} pour $k > 1$.

10. – On suppose que tous les δ_k sont non nuls. Démontrer que les matrices L et U de la décomposition LU de A sont

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{3,2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2,2} & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

avec $l_i = a_i \frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$ et des coefficients $u_{i,i}$ à expliciter en fonctions des δ_k.

Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.On se donne un réel b et on étudie le cas où $b_i = 2b$ et $a_i = c_i = -1$ pour tout i.

11. – On suppose dans cette question que $b = 1$

- ***a.*** Calculer δ_k pour tout k et en déduire les matrices L et U.
- ***b.*** Déterminer l'inverse de la matrice U et en déduire la matrice A^{-1}

12. – Dans cette question on suppose $|b| < 1$ et on écrit $b = \cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que pour tout k on a $(\sin\theta)\delta_k = \sin(k+1)\theta$.

13. – En déduire une CNS pour que la matrice A possède une factorisation LU