**MP* Lycée Buffon**

## DS 3

## Sujet CCINP

**Durée : 4 heures**

### Notations

$n$ et $p$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées. $I_n$ représentant la matrice identité.
$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $0_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.
Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $X$ soit $x_i$. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $AX$.
Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de $A$ et on appelle rayon spectral de $A$ le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note $N_\infty$ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme $\varphi$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \varphi(AB)\leq\varphi(A)\cdot\varphi(B).$$

### Partie I

Le but des deux premières questions du sujet original est de prouver que toute matrice complexe est trigonalisable. Comme ce sont des questions de cours, elles sont enlevées et le sujet commence question **I.3**

**I.1**

**I.2**

**I.3** Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

**a)** Démontrer que $\chi_G = (X-1)^3$. La matrice $G$ est-elle diagonalisable ?

**b)** On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Montrer que $G$ admet un unique vecteur propre $u$ dont la première composante dans la base $\mathcal{B}$ est égale à 1 et vérifier que $\mathcal{B}_1 = (u, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

**c)** On note $Q$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$. Calculer $Q^{-1}GQ$ et en déduire $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}GP = T$.

**I.4** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $T$ est une matrice triangulaire supérieure semblable à $A$, que représentent les éléments diagonaux de $T$ ?

**I.5** Avec les memes notations, pour $k \in \mathbb{N}^*$, quels sont les éléments diagonaux de $T^k$ ?

**I.6** Montrer que pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k$.

**I.7** Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**I.8** En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme $N$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante $C$ réelle positive telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, N(AB) \leq C N(A) N(B).$$

*indication : on on pourra utiliser, après justification, l'équivalence des normes.*

**I.9** Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $A$ si et seulement si la suite $\left(P^{-1}AP\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

**I.10 a)** Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $T^k$ et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(|\lambda| < 1)$ ou $(\lambda = 1$ et $\mu = 0)$.

**b)** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $A$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

**c)** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k$.

**d)** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

## Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N$ une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

**II.1 a)** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ : $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.

**b)** Montrer qu'il existe une constante réelle $C_A$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X).$$

**c)** Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite :

$$\tilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

pour une norme $N$ quelconque, et en particulier :

$$\widetilde{N_\infty}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)}.$$

**d)** Montrer que : $\widetilde{N_\infty}(A) \leq M_A$.

**e)** On reprend dans cette question la matrice $G$ introduite en **I.3**. Déterminer un vecteur $X_0$ de $\mathbb{C}^3$ tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(GX_0) = 10$. En déduire la valeur de $\widetilde{N_\infty}(G)$.

**II.2** Soit $i_0$ un entier compris entre 1 et $n$ tel que $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur $Y$ de $\mathbb{C}^n$ de composantes $y_j$ définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N_\infty}(A)$ et en déduire $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A$.

**II.3** Montrer :

**a)** $\tilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.

**b)** $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \, \tilde{N}(A)$.

**c)** En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \, \tilde{N}(A)$.

**d)** $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \tilde{N}(A+B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.

**e)** $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \tilde{N}(A) N(X)$.

**f)** Déduire de ces résultats que $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme $N$.

**II.4 a)** En considérant une valeur propre $\lambda$ de $A$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leq \tilde{N}(A).$$

**b)** Donner un exemple simple de matrice $A$ non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N_\infty}(A)$.

**c)** Montrer que si $A$ est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte :

$$\rho(A) < \tilde{N}(A).$$

**II.5** Montrer que si $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

**Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$.**

**II.6 a)** Montrer que pour tout $k$ entier naturel non nul : $\rho(A) \leq \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

**b)** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha| \, \rho(A)$.

**c)** Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel $k_\varepsilon$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \tilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k\right).$$

**d)** En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

## Partie III

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (resp. $A \leq B$, $A > B$, $A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (resp. $B - A \geq 0$, $A - B > 0$, $B - A > 0$).

Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

**III.1** Donner un exemple de matrice $A$ montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

**III.2** $A$, $B$, $A'$, $B'$ désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**a)** Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.

**b)** Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$.

**c)** Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N_\infty}(A) \leq \widetilde{N_\infty}(B)$.

**d)** Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.

**e)** Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in ]0,1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.

**III.3** Soit $A$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne soit constante égale à $\alpha$. Montrer que $\alpha$ est valeur propre de $A$ et que :

$$\rho(A) = \alpha = \widetilde{N_\infty}(A).$$

**III.4** Soit $A$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\alpha_i$ la somme des termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $A$ et $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$. On définit la matrice $B = (b_{i,j})$ par $B = 0_n$ si $\alpha = 0$ et $b_{i,j} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} a_{i,j}$ si $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la matrice $B$ ainsi construite que :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right).$$

**III.5** Soit $A$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)$ un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$.
On note $D_x$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour termes diagonaux $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$. Calculer les éléments de la matrice $D_x^{-1} A D_x$ et en déduire :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

**III.6** Soit $A$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A$ admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et :

$$\rho(A) = \sup_{X > 0} \left( \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{X > 0} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right).$$

**Fin de l'énoncé**