Sujet type CCP

Le but de ce problème est d'établir des propriétés de la fonction Gamma d'Euler.

I.La fonction Γ.

On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

I.A. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

I.B. 1. soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. On définit une fonction φ en posant

$$\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } \ t \in]0,1[\\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } \ t \geq 1 \end{cases}$$

Démontrer que cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$

2. En déduire en appliquant le théorème de Leibniz que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$.

I.C. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

I.D. Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

II.Formule de Stirling.

II.A. En appliquant la formule de Stirling démontrer qu'on a, quand n tend vers l'infini, le développement suivant :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$$

III. L'identité d'Euler.

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \qquad (III.1)$$

On désigne par $(f_n)_{n\geq 1}$la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } \ t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } \ t \geq n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n\geq 1}$ et $(J_n(x))_{n\geq 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$$

III.A. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B. 1. Démontrer que pour tout $t > 0$, $f_n(t) \to e^{-t}t^{x-1}$ quand n tend vers l'infini.

2. Etablir l'inégalité
$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1} \quad \text{si} \quad t \in]0, n[$$

3. En déduire en utilisant le théorème de convergence dominée que, pour tout $x > 0$,
$$\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:
$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D. En déduire que pour tout $x > 0$,
$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$$

III.E. Etablir l'identité d'Euler ($III.1$).

IV.Une intégrale à paramètres.

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par
$$h(u) = u - [u] - 1/2$$
où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u.

IV.A. Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1, 1]$ et vérifier que cette fonction h est1- périodique.

IV.B. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt$$
est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C. A l'aide d'une intégration par parties, justifier pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale suivante :
$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$
indication : intégrer h dans $\int_0^x \frac{h(u)}{u+x}\, du$

IV.E. Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par
$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

En reprenant l'intégration par parties de la question **IV.C**, démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x > 0$
$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\, du$$

V. Une autre identité due à Euler.

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x + \frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

où h est l'application définie à la partie IV.
On fixe donc $x > 0$ et pour tout entie naturel n, on définit $F_n(x)$ par

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right)$$

V.A. Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)\, dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du$$

V.B. En déduire que

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

où

$$G_n(x) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x)$$

V.C.

C.1 En utilisant la formule de Stirling, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$$

C.2 En déduire que

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x + \frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

D.1 En reprenant l'intégration par parties de la question **IV.C**, déterminer la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers l'infini.

D.2 En déduire la formule de Stirling généralisée :

$$\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

cette formule justifie que la fonction gamma est bien le prolongement naturel de la factorielle

V.D. Une autre application :
Trouver une relation entre $\Gamma'(2)$ et $\varphi'(1)$. Puis exprimer $\Gamma'(2)$ sous forme d'une somme de série.