# DS5 corrigé (d'après Centrale PSI 2011)

## 1 La fonction $\Gamma$.

**I.A.** $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ ; les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

- Au voisinage de 0, $f_x(t) \sim t^{x-1}$ est intégrable si et seulement si $1 - x < 1$ (fonctions de Riemann).
- Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ (croissances comparées) et $f_x$ est donc intégrable.

Finalement $f_x$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $x > 0$.

**I.B.** Soit $h : (x,t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ ; $h$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et admet sur cet ensemble une dérivée partielle par rapport à $x$ qui est aussi continue. Enfin,

$$\forall 0 < a < b,\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0,\ |h(x,t)| \le \phi_0(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$$\forall 0 < a < b,\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0,\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \le \phi_1(t) = \begin{cases} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$\phi_0$ et $\phi_1$ étant intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (négligeables devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ et devant $t^{\frac{a}{2}-1}$ au voisinage de 0 par croissances comparées et continues par morceaux ailleurs), le théorème sur les intégrales à paramètres indique que $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\, dt$$

Par ailleurs, la fonction intégrée étant positive, continue et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a aussi

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) > 0$$

**I.C.** Soit $x > 0$. Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b e^{-t}t^x\, dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}\, dt$$

En faisant tendre $a$ vers 0 et $b$ vers l'infini (les différentes limites existent bien) on a donc

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

**I.D.** Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

La formule de la question précédente donne alors directement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

## 2 Formule de Stirling.

**II.A.** On pose $v_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}}$ La formule de Stirling stipule que $v_n \to 1$ quand $n$ tend vers l'infini.
Ceci donne : $v_n = 1 + o(1)$
En prenant le logarithme il vient $\ln(v_n) = o(1)$ Il suffit de développer le terme de gauche pour avoir le résultat voulu.

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1)$$

## 3 L'identité d'Euler.

**III.A.** $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (le seul problème est en $n$ où le raccord se fait bien, limite à droite et gauche valant 0), nulle au voisinage de $+\infty$ (où elle est donc intégrable) et équivalente à $t^{x-1}$ en 0 (où elle est intégrable puisque $x > 0$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

**III.B.** La suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ (puisque l'on a $(1-u/n)^n = \exp(n\ln(1-u/n)) \to \exp(-u)$ quand $n \to +\infty$).
Les $f_n$ ainsi que la limite simple sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Par concavité de ln, on a $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \le u$ ; on a donc (croissance de l'exponentielle)

$$\forall t \in ]0,n[,\ 0 \le f_n(t) \le t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \le t^{x-1}e^{-t}$$

et l'inégalité reste vraie trivialement pour $t \ge n$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (déjà vu) et le théorème de convergence dominée s'applique pour donner

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \Gamma(x)$$

**III.C.** Soit $a \in ]0,1]$ ; une intégration par parties donne

$$\int_a^1 (1-u)^{n+1}u^{x-1}\,dx = \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^{n+1}\right]_a^1 + \frac{n+1}{x}\int_a^1 u^x(1-u)^n\,du$$

En passant à la limite $a \to 0$ (les différentes quantités existent ; en particulier, $x > 0$ donne $x-1 > -1$ et on a l'intégrabilité au voisinage de 0)

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}J_n(x+1)$$

**III.D.** On montre par récurrence que la propriété

$$\forall x > 0,\ J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}J_0(x+n)$$

est vraie pour tout $n \ge 1$.
- Initialisation : le résultat est vrai au rang 1 d'après la question précédente.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $n \ge 1$. En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence au rang $n$ avec $x+1$, on obtient le résultat au rang $n+1$.

Le calcul de $J_0$ étant immédiat, on trouve alors

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

**III.E.** Le changement de variable $u = t/n$ donne

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et la question **III.B** indique alors que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

# 4 Une intégrale à paramètres.

**IV.A.** Sans difficulté.

**IV.B.** $h$ est, comme la fonction partie entière, 1-périodique. Son intégrale sur $[t, t+1]$ est donc indépendante de $t$ et vaut 0 (calcul pour $t = 0$ par exemple). On en déduit alors que

$$\forall x,\ H(x+1) - H(x) = \int_x^{x+1} h(t)\ dt = 0$$

ce qui montre que $H$ est aussi 1-périodique. De plus, pour tout entier $n$, $\int_0^n h = 0$ et

$$\forall x,\ H(x) = \int_0^{[x]} h(t)\ dt + \int_{[x]}^x h(t)\ dt = \int_{[x]}^x h(t)\ dt$$

Le changement de variable $u = t - |x|$ donne (avec la périodicité de $h$)

$$\forall x,\ H(x) = \int_0^{x-[x]} h(u)\ du = \int_0^{x-[x]} (u - 1/2)\ du = \frac{(x-[x])(x-[x]-1)}{2}$$

$H$ est, comme la fonction partie entière, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

**IV.C.** Soit $n \in \mathbb{N}$. $h$ est continue sur $[n, n+1[$ et, d'après le théorème fondamental, l'application $x \mapsto \int_n^x h$ est une primitive de $h$ sur $[n, n+1[$. En ajoutant une constante, on garde une primitive. On a donc aussi $H$ qui est une primitive de $h$ sur $[n, n+1[$. Une intégration par partie donne alors

$$(*)\ :\ \forall a \in [n, n+1[,\ \int_n^a \frac{h(u)}{x+u}\ du = \left[\frac{H(u)}{x+u}\right]_n^a + \int_n^a \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du$$

En faisant tendre $a$ vers $n+1$ dans cette relation, on a alors (puisque $H(n) = H(n+1) = 0$)

$$(**)\ :\ \int_n^{n+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du = \int_n^{n+1} \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du$$

La fonction $u \mapsto \frac{h(u)}{x+u}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, elle présente un unique problème, pour l'existence d'intégrale, au voisinage de $+\infty$. Soit alors $b > 0$. On a

$$\int_0^b \frac{h(u)}{x+u}\ du = \sum_{k=0}^{[b]-1} \int_k^{k+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du + \int_{[b]}^b \frac{h(u)}{x+u}\ du$$

Avec $(*)$ et $(**)$ on a donc (en tenant compte de $H([b]) = 0$)

$$\int_0^b \frac{h(u)}{x+u}\ du = \int_0^b \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du + \frac{H(b)}{(x+b)^2}$$

$H$ étant continue et périodique est bornée sur $\mathbb{R}$. Le second terme du membre de droite est donc de limite nulle quand $b \to +\infty$. De plus, $u \mapsto \frac{H(u)}{x+u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a ainsi l'existence d'une limite quand $b \to +\infty$ pour l'intégrale du membre de droite ci-dessus. Finalement, l'intégrale proposée existe et

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\ du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du$$

**IV.E.** On va utiliser la théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall u \geq 0,\ x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -2\frac{H(u)}{(x+u)^3}$
- $\forall x > 0,\ u \mapsto x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2}$ et $u \mapsto x \mapsto -2\frac{H(u)}{(x+u)^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left| x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2} \right| \leq x \mapsto \frac{\|H\|_\infty}{(a+u)^2}$$

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left| x \mapsto -2\frac{H(u)}{(x+u)^3} \right| \leq x \mapsto \frac{2\|H\|_\infty}{(a+u)^3}$$

Les majorants sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (continus et dominés par $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$). Le théorème s'applique et le calcul de la question **IV.C** donne $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2H(u)}{(x+u)^3}\ du$$

Par ailleurs, le même calcul qu'en **IV.C** donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\ du = \int_0^{+\infty} \frac{2H(u)}{(x+u)^3}\ du$$

On a donc finalement

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\ du$$

# 5 Une autre identité due à Euler.

**V.A.** Une intégration par partie donne (on primitive 1 en $t-x-i-1$)

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)\ dt = [(t-x-i-1)\ln(t)]_{t=x+i}^{t=x+i+1} - \int_{x+i}^{x+i+1} \frac{t-x-i-1}{t}\ dt$$

Avec le changement de variable $u = t - x$ dans l'intégrale du membre de droite, on a alors

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)\ dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\ du$$

**V.B.** On a tout d'abord

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \int_i^{i+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1/2}{u+x}\ du = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\ du + \frac{1}{2}\int_i^{i+1} \frac{du}{u+x}$$

En sommant ces relation de $i=0$ à $i=n$ et en utilisant la relation de Chasles et la question précédente, il vient

$$\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du = \ln(x(x+1)\dots(x+n)) - \int_x^{x+n+1} \ln(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_0^{n+1} \frac{du}{u+x}$$

Le calcul des intégrales est immédiat ($x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$) et on obtient la quantité

$$\ln((x+1)\dots(x+n)(x+n+1)) - (x+n+\frac{3}{2})\ln(x+n+1) + (x+n+1) + x\ln(x) - x + \frac{\ln(x)}{2}$$

On a alors

$$G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du = \ln\left(\frac{n! n^{x+1}}{(x+1)\dots(x+n+1)}\right) = F_n(x)$$

**V.C.1** On écrit que

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

$$\begin{aligned}(x+n+\frac{3}{2})\ln(x+n+1) &= (n+x+\frac{3}{2})\left(\ln(n)+\ln(1+\frac{1+x}{n}\right) \\ &= (n+x+\frac{3}{2})\left(\ln(n)+\frac{1+x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n\ln(n)+(x+\frac{3}{2})\ln(n)+(1+x)+o(1)\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$G_n(x) = 1 + (x+\frac{1}{2})\ln(x) - 1 - x + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$$

**V.C.2** Avec l'identité d'Euler et la continuité de ln, on a $F_n(x) \to \ln(\Gamma(x+1))$ quand $n \to +\infty$. On a ainsi, en passant à la limite dans **V.B**,

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\,du$$

**V.D.** 1. En utilisant la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(x+u)^2}\,du$$

on voit que $|\varphi(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\|H\|_\infty}{(x+u)^2}\,du$. Cette dernière intégrale se calcule : elle vaut $\frac{\|H\|_\infty}{x}$. Par encadrement on a donc $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

2. On passe a l'exponentielle dans l'identité de **V.C.2** : il vient $\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}e^{\varphi(x)}$, ce qui conclut.

**V.E** Si on dérive cette relation, on obtient alors

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{x+1/2}{x} - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$

ou encore

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$

En appliquant pour $x=1$ on a $\Gamma'(2) = \ln 2 + \frac{1}{4} + int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+1)^2}\,du$. En utilisant la périodicité de $h$ il vient :
$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+1)^2}\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{h(u)}{(u+1)^2}\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{h(u)}{(u+n+1)^2}\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{u-1/2}{(u+n+1)^2}\,du$
Cette dernière intégrale se calcule facilement.