Le sujet est constitué d'un problème prévu en 3 heures (mines). Il est complété par un exercice issu d'un problème de Polytechnique. Cet exercice ne doit être abordé **qu'à la fin si le problème est terminé**.

Problème : Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants.

• $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

• $\mathscr{D}$ la partie de $\mathscr{E}$ constitué de ses éléments développables en séries entière sur un voisinage de 0.

• $\mathscr{P}$ la partie de $\mathscr{E}$ constitués de ses éléments polynômiaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$$

et si $f \in \mathscr{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules :

$$(\forall x \in I) \begin{cases} u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x \sin t) dt \\ v(f)(x) = f(0) + x \displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \end{cases}$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations

A. Préliminaires

1) Justifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathscr{E}$.

2) Montrer que si $f \in \mathscr{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartient à $\mathscr{E}$ et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathscr{E}$.

3) Montrer que $\mathscr{P}$ est stable par u et par v.

4) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

5) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B. Étude de la continuité de u et de v

On considère une norme M de $\mathscr{E}$ définie pour tout $f \in \mathscr{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|$$

6) Montrer que u est une application lipschitzienne de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{E}, M)$ dans lui même.

7) L'application v est-elle continue de $(\mathscr{E}, M)$ dans lui même ?

8) Vérifier que l'application $N : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathscr{E}$, et montrer que v est lipschitzienne de $(\mathscr{E}; N)$ dans $(\mathscr{E}, M)$. Les normes M et N sont-elles équivalentes ?

9) Si $f \in \mathscr{E}$ et si $\varepsilon > 0$,montrer qu'il existe $P \in \mathscr{P}$ tel que $f(0) = P(0)$ et $|f'(x) - P'(x)| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathscr{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{E}, N)$.

C. Étude de l'inversibilité de u et v

10) Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathscr{P}$.

11) Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v.

12) Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Conclure.

Application

13) pour tout $f \in \mathscr{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan t$ et en déduire $u(g)$ où g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

14) Question supprimée

D. Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15) Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

16) Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathscr{E}$.

17) vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{x \in I} |f^{(n)}(t)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,

$$|\lambda||f^{(n)}(x)| \leq \frac{2 m_n W_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathscr{P}$.

18) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et de v.

19) L'espace vectoriel $\mathscr{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? de v. L'ensemble des valeurs propres de u (respectivement de v) est-il une partie fermé de $\mathbb{C}$?

Fin du problème

Exercice

Pour toute fonction f de deux variables réelles x et y, on posera $\partial_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Par ailleurs on pose

$$\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$
$$\bar{\Pi}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$$

Enfin on désigne par K la fonction sur Π_+ définie par

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\mathrm{d}x$.

2. Calculer $\partial_1 K$, $\partial_2 K$, $\partial_1^2 K + \partial_2^2 K$.

Dans la suite, la lettre f désigne une fonction de la variable réelle continue bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que, pour tout (x, y) dans Π_+, la fonction $t \mapsto f(t)K(x - t, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On notera $\Phi_f\ (x, y)$ son intégrale.

4. Montrer que la fonction Φ_f ainsi définie sur Π_+ est continue et bornée.

5. Montrer que Φ_f . Montrer l'existence des dérivées partielles $\partial_1^2 \Phi_f$et $\partial_2^2 \Phi_f$ Calculer $\partial_1^2 \Phi_f + \partial_2^2 \Phi_f$.

6. Soit x_0 un réel, ε un réel > 0. Trouver un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Pi_+, \qquad |x - x_0| < \eta, \quad y < \eta \Rightarrow \left|\Phi_f(x, y) - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

indication : on fera le changement de variable $t = x + u$ dans l'intégrale définissante Φ_f.

En déduire l'existence d'un prolongement continu de Φ_f à $\bar{\Pi}_+$.

cette fonction Φ_f joue un rôle très important en analyse harmonique