**Corrigé École polytechnique 1999**

*Réalisé par Rémi Souveton : remi.souveton@prepas.org*

L'objet de ce problème est l'étude du noyau de Poisson sur le demi plan $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ y>0\}$.

**Première partie**

**1)** À $y>0$ fixé, la fonction $x\mapsto \dfrac{y}{x^2+y^2}$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Les deux seules singularités pour l'intégrale sont donc en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme cette fonction est paire, il suffit d'étudier la première singularité. Or, on a la majoration

$$0\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=0\left(\frac{1}{x^2}\right),\qquad x\mapsto+\infty.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente, le théorème de comparaison assure la convergente de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}K(x,y)\,dy$. La remarque de parité et le principe de séparation des singularités, permettent de conclure quant à la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y)\,dx$.

Pour le calcul, on utilise une primitive classique, pour $y>0$ de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+y^2}$, sur $\mathbf{R}$, à savoir $x\mapsto \dfrac{1}{y}\arctan\dfrac{x}{y}$. On peut donc écrire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{x}{y}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}.$$

On a alors la réponse $\boxed{K(x,y)=1.}$

**2)** La fonction $K$ est de classe $C^\infty$ sur $\Pi_+$, en tant que fraction rationnelle. Un calcul direct (à détailler) donne alors

$$\boxed{\partial_1K(x,y)=-\frac{2}{\pi}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \partial_2K(x,y)=\frac{1}{\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.}$$

Pour les dérivées secondes, on a déjà

$$\partial_1^2K(x,y)=\frac{2}{\pi}\frac{y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\text{ et }\partial_2^2K(x,y)=-\frac{2}{\pi}\frac{y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Donc, par somme

$$\boxed{\partial_1^2K+\partial_2^2K=0.}$$

**3)** On peut raisonner par récurrence (généralisée) sur $m+n$.

Si $m+n=0$, alors, puisque, dans ce cas, $m=n=0$, en posant $P_{0,0}(x,y)=\dfrac{y}{\pi}$, on a bien

$$K(x,y)=\frac{P(x,y)}{x^2+y^2}.$$

Soient $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tel qu'il existe $P_{m,n}$ un polynôme de degré majoré par $2(m + n)$, tel que

$$\partial_1^m \partial_2^n K(x, y) = \frac{P_{m,n}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{m+n+1}}.$$

Soient alors $(m', n') \in \mathbf{N}^2$ tels que $m' + n' = m + n + 1$. On a deux cas.

*Si* $m' = m$ *et* $n' = n + 1$.

On a alors, selon le théorème de Schwarz, qui s'applique ici, puisque $K$ est $C^\infty$,

$$\partial_1^m \partial_2^{n+1} K(x, y) = \partial_2 \left(\partial_1^m \partial_2^n K\right)(x, y) = \partial_2 \frac{P_{m,n}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{m+n+1}}$$
$$= \frac{(x^2 + y^2)\partial_2 P_{m,n}(x, y) - 2(m + n + 1)yP_{m,n}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{m+n+2}}.$$

On pose alors $P_{m,n+1}(x, y) = (x^2 + y^2)\partial_2 P_{m,n}(x, y) - 2(m + n + 1)yP_{m,n}(x, y)$. Il reste à prouver que le degré de $P_{m,n+1}$ par rapport à $x$ est inférieur à $2(m + n + 1)$.

On a en effet

$$\deg_x P_{m,n+1} \leqslant \max\left(2 + \deg_x P_{m,n}, \deg_x P_{m,n}\right) \leqslant 2(m + n) + 2,$$

par hypothèse de récurrence.

Ainsi, défini, $P_{m,n+1}$ est bien un polynôme dont le degré par rapport à $x$ est inférieur à $2(m + n + 1)$.

*Si* $m' = m + 1$ *et* $n = n'$.

On raisonne de la même façon avec

$$P_{m+1,n}(x, y) = (x^2 + y^2)\partial_1 P_{m,n}(x, y) - 2(m + n + 1)xP_{m,n}(x, y).$$

Pour le degré, on on considère

$$\deg_x P_{m+1,n} \leqslant \max\left(1 + \deg_x P_{m,n}, 1 + \deg_x P_{m,n}\right) \leqslant 2(m + n) + 1.$$

On a également le résultat.

## Deuxième partie

**4)** Comme produit de fonctions continues, $t \mapsto f(t)K(x - t, y)$ est continue. Les seules singularités sont en $-\infty$ et $+\infty$.

Comme $f$ est bornée sur $\mathbf{R}$, on peut poser $M = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f|$.

Par séparation des singularités, on commence par étudier l'intégrabilité de $f$ sur $[1, +\infty[$. On a l'inégalité

$$0 \leqslant |f(t)K(x - t, y)| \leqslant MK(x - t, y) = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc, par le théorème de comparaison $t \mapsto f(t)K(x - t, y)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Sur $] - \infty, -1]$, on raisonne de même avec l'inégalité suivante

$$0 \leqslant |f(t)K(x - t, y)| \leqslant MK(x - t, y) = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

Par regroupement, $t \mapsto f(t)K(x - t, y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

**5a)** Selon la question précédente, on peut écrire, pour tout $(x, y) \in \Pi_+$,

$$\Phi_f(x, y) = \int_{\mathbf{R}} f(t)K(x - t, y)\, dt = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt.$$

Selon les inégalités de la question précédente, avec les mêmes notations, pour $(x,y) \in \Pi_+$,

$$|\Phi_f(x,y)| \leqslant M \int_{\mathbf{R}} K(x-t,y)\,dt = M \int_{\mathbf{R}} K(u,y)\,du = M,$$

en effectuant le changement de variable $u = x-t$, ce qui ne change pas la nature convergente de l'intégrale. La fonction $\Phi_f$ est donc bornée. Pour montrer qu'elle est continue, on utilise le théorème de continuité sous le signe intégrale. On réutilise, le changement de variable précédent, afin d'écrire,

$$\Phi_f(x,y) = \int_{\mathbf{R}} f(x-u)K(u,y)\,du.$$

Dès lors, pour montrer que $\Phi_f$ est continue, il suffit de montrer que $(x,y) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{f(x-u)}{u^2+y^2}\,dy$ est continue.

Pour ce faire, on considère $K_1 : (u,y) \mapsto \dfrac{1}{u^2+y^2}$, ainsi que $\varepsilon > 0$. On note $F_\varepsilon = \mathbf{R} \times [\varepsilon, +\infty[$.

À $u$ fixé dans $\mathbf{R}$, la fonction $(x,y) \mapsto f(x-u)K_1(u,y)$ est continue sur $F_\varepsilon$.

À $(x,y) \in F_\varepsilon$ fixé, la fonction $u \mapsto f(x-u)K_1(u,y)$ est continue et intégrable sur $\mathbf{R}$.
On a l'hypothèse de domination (avec $M = \sup|f| \in \mathbf{R}$, puisque $f$ est bornée)

$$|f(x-u)K_1(u,y)| \leqslant M \frac{1}{u^2+\varepsilon^2}.$$

Le membre de droite est continu et intégrable sur $\mathbf{R}$.

Le théorème de continuité sous le signe somme permet alors d'écrire que $(x,y) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-u)K_1(u,y)du$, est continue sur $F_\varepsilon$, donc sur l'union de tous les $F_\varepsilon$ pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire $\Pi_+$.
Par produit de fonctions continues, on en déduit que

$$(x,y) \mapsto \Phi_f(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(x-u)K_2(u,y)\,dy$$

est continue sur $\Pi_+$.
**5b)** Selon, la question précédente, on a, pour $f \in E$,

$$\forall (x,y) \in \Pi_+,\ |\Phi_f(x,y)| \leqslant \|f\|.$$

On en déduit $\|\Phi_f\| \leqslant \|f\|$. Il s'ensuit que $f \mapsto \Phi_f$ est continue, de norme $\|\Phi\|$ inférieure à 1.
En prenant $f = 1$, la fonction constante, on a, pour tout $(x,y) \in \Pi_+$, $\Phi_1(x,y) = 1$, selon la question 1. Par conséquent, $\|\Phi_1\| = \|f\|$, et, avec le résultat précédent, on peut conclure,

$$\boxed{\|\Pi\| = 1.}$$

**6)** Pour montrer que $\Phi_f$ est $C^\infty$, on prouve, par récurrence, que $\Phi_f$ est de classe $C^k$, pour tout $k$ entier naturel. Pour le cas $k = 0$, c'est le résultat de la question 5a.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que $\Phi_f$ est de classe $C^k$.

Pour prouver que $\Phi_f$ est $C^{k+1}$, il suffit, selon le théorème fondamental de calcul différentiel, de prouver que pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ tels que $m+n = k$, toutes les fonctions du type $\partial_1^m \partial_2^n \Phi_f$ admettent des dérivées continues sur $\Pi_+$. Dans la suite, on fixe $m$ et $n$ entier naturels tels que $m+n = k$.
Pour cela, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale. On note $H$ un compact de $\Pi_+$.

À $(x, y)$ fixés dans $H$, les fonctions suivantes sont continues et intégrables sur $\mathbf{R}$

$$\begin{gathered} t \mapsto f(t)\partial_x^m\partial_y^n K(x-t,y) \\ t \mapsto f(t)\partial_x\partial_x^m\partial_y^n K(x-t,y) \\ t \mapsto f(t)\partial_y\partial_x^m\partial_y^n K(x-t,y) \end{gathered}$$

À $t$ fixé, les fonctions suivantes sont bien définies et continues (selon la question 3 ce sont même des fractions rationnelles).

$$\begin{gathered} (x,y) \mapsto f(t)\partial_x^m\partial_y^n K(x-t,y) \\ (x,y) \mapsto f(t)\partial_x\partial_x^m\partial_y^n K(x-t,y) \\ (x,y) \mapsto f(t)\partial_y\partial_x^m\partial_y^n K(x-t,y) \end{gathered}$$

Comme $H$ est un compact de $\Pi_+$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(x, y) \in H \Rightarrow y > 0$. Les deux fonctions

$$(t,x,y) \mapsto \left[\partial_x^{m+1}\partial_y^n K(x-t,y)\right] \text{ et } \mapsto (t,x,y) \left[\partial_x^m\partial_y^{n+1} K(x-t,y)\right].$$

n'ont donc pas de pôles sur $H$.

En utilisant la question 3a, on a

$$\deg_t \left[\partial_x^{m+1}\partial_y^n K(x-t,y)\right] < -1 \text{ et } \deg_t \left[\partial_x^m\partial_y^{n+1} K(x-t,y)\right] < -1.$$

Comme $x$ et $y$ sont dans un compact, il existe une fraction rationnelle $g$, sans pôles sur $\mathbf{R}$, telle que $g(t) = O\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$ si $|t| \to +\infty$ et, pour tout $(x, y, t) \in H \times \mathbf{R}$

$$\left[\partial_x^{m+1}\partial_y^n K(x-t,y)\right] < g(t) \text{ et } \left[\partial_x^m\partial_y^{n+1} K(x-t,y)\right] < g(t).$$

L'intégrabilité de $g$ assure l'hypothèse de domination. Le théorème de dérivation permet alors d'écrire que $\Phi_f$ est $C^{k+1}$ sur $H$.

Pour le caractère $C^{k+1}$ sur $\Pi_+$, on passe à l'union de tous les compacts de $\Pi_+$, c'est-à-dire $\Pi_+$ lui-même.

Passons au calcul du Laplacien de $\Phi_f$. On utilise la formule de Leibniz, légitimée par le théorème de dérivation sous le signe somme. Soient $(x, y) \in \Pi_+$

$$\begin{aligned} \partial_1^2\Phi_f(x,y) + \partial_2^2\Phi_f(x,y) &= \int_{\mathbf{R}} f(t)\partial_1^2 K(x-t,y)\,dt + \int_{\mathbf{R}} f(t)\partial_2^2 K(x-t,y)\,dt. \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(t)\left(\partial_1^2 K + \partial_2^2 K\right)(x-t,y)\,dt = 0, \end{aligned}$$

puisque, selon la question 2 $K$ est elle-même harmonique.

Ainsi $\boxed{\partial_1^2\Phi_f + \partial_2^2\Phi_f = 0.}$

**7)** Posons ici $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y \geqslant a\}$, et $M$ un majorant de $f$.

Pour montrer qu'une fonction de classe $C^1$ est uniformément continue il suffit, selon le théorème des accroissements finis de montrer que ses dérivées sont bornées. Ce théorème s'applique effectivement sur $H$, puis que $H$ est convexe.

On applique la formule de Leibniz, selon la question 6. On a, pour $(x, y) \in H$

$$\begin{aligned} |\partial_1\Phi_f(x,y)| &= \left|\int_{\mathbf{R}} f(t)\partial_1 K(x-t,y)\,dt\right| = \left|-\frac{2y}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{(x-t)}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{2y}{\pi} M \int_{\mathbf{R}} \left|\frac{(x-t)}{((x-t)^2+y^2)^2}\right|\,dt \end{aligned}$$

Montrons que cette dernière intégrale est en $O(1/y)$ sur $H$. On a en effet

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{(x-t)}{((x-t)^2+y^2)^2}\right| dt &= \int_{-\infty}^{x}\frac{x-t}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt+\int_{x}^{+\infty}\frac{t-x}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt\\ &= \left[\frac{1}{2((x-t)^2+y^2}\right]_{-\infty}^{x}+\left[-\frac{1}{2((x-t)^2+y^2)}\right]_{x}^{+\infty}\\ &= \frac{1}{y^2}.\end{aligned}$$

On reporte dans l'expression précédente, ce qui donne $|\partial_1\Phi_f(x,y)|\leqslant\dfrac{2M}{y\pi}\leqslant\dfrac{2M}{a\pi}$.

Cette première dérivée est donc bornée. Passons à la seconde.

On a cette fois

$$\begin{aligned}|\partial_2\Phi_f(x,y)| &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{|(x-t)^2-y^2|}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt\\ &\leqslant\frac{M}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{(x-t)^2+y^2}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt=\frac{M}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\,dt\\ &\leqslant\frac{M}{\pi}\left[\frac{1}{y}\arctan\frac{t-x}{y}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty}=\frac{M}{y}\leqslant\frac{M}{a}\end{aligned}$$

Cette dérivée est également bornée.

**8)** Soient $(x,y)\in\Pi_+$, on peut écrire

$$\Phi_f(x,y)=\int_{\mathbf{R}} f(t)K(x-t,y)\,dt=\int_{\mathbf{R}} f(x+u)K(u,y)\,du.$$

ainsi que $|\Phi_f(x,y)-f(x_0)|\leqslant\displaystyle\int_{\mathbf{R}}|f(x+u)-f(x_0)|K(u,y)\,du$.

On procède par découpe en trois de cette intégrale. On commence par écrire que $f$ est continue en $x_0$. Il existe alors $\alpha$ tel que

$$\forall x\in\mathbf{R},\ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

Dans toute la suite on considère $x\in]x_0-\alpha/2;x_0+\alpha/2[$, fixé. On commence par étudier l'intégrale pour $x_0-\alpha\leqslant x+u\leqslant x_0+\alpha$, c'est-à-dire

$$\int_{]x_0-\alpha-x,x_0+\alpha-x[}|f(x+u)-f(x_0)|K(u,y)\,du\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

car $\displaystyle\int_{\mathbf{R}}K(u,y)\,du=1$.

Passons à l'intégrale sur $[x_0+\alpha-x,+\infty[$. On a alors $x_0+\alpha-x>0$ et, en notant $M=\sup\limits_{\mathbf{R}}|f|$

$$\begin{aligned}\int_{[x_0+\alpha-x,+\infty[}|(f(x+u)-f(x_0)|K(u,y)\,du &\leqslant\frac{2M}{\pi}\int_{[x_0+\alpha-x,+\infty[}\frac{y du}{u^2+y^2},\\ &\leqslant M\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x_0+\alpha-x}{y}\right),\\ &\leqslant M\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{\alpha}{2y}\right).\end{aligned}$$

Il existe alors $\beta\in\left]0;\dfrac{\alpha}{2}\right[$ tel que si $y\in\left]0;\eta\right[$ alors cette dernière intégrale est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{4}$

Enfin, par le même raisonnement (à détailler), il existe $\eta \in ]0, \beta[$ tel que si $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et $y \in [0, \eta]$, alors

$$\int_{]-\infty; x_0+\alpha-x]} |(f(x+u) - f(x_0)|K(u,y)\, du \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

En regroupant les intégrales, par somme, il vient, pour $(x,y) \in \Pi_+$ tels que $|x - x_0| \leqslant \eta$ et $y \leqslant \eta$

$$|\Phi_f(x,y) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

**9a)** On procède de manière analogue à la question 8.

**9b)** Selon la question 7, $\Phi_f$ est uniformément continue sur $H_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y \geqslant a\}$. Il suffit donc de prouver que $\overline{\Phi}_f$ est uniformément continue sur $B_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$, en choisissant convenablement $a$.

Soit $\alpha > 0$, on pose $\epsilon = \dfrac{\alpha}{2} > 0$ dans la question précédente, et on en déduit $\eta > 0$. On pose alors $\beta = \eta$.

On considère ensuite $(x,y)$ et $(x', y')$ dans $B_\beta$ tels que

$$|x - x'| \leqslant \beta \text{ et } |y - y'| \leqslant \beta.$$

On peut alors écrire

$$|\overline{\Phi}_f(x,y) - \overline{\Phi}_f(x',y')| \leqslant |\overline{\Phi}_f(x,y) - f(x_0)| + |\overline{\Phi}_f(x',y') - f(x_0)| \leqslant 2\varepsilon = \alpha.$$

On a donc bien l'uniforme continuité sur $B_\beta$, puis sur $H_a$, avec $a < \beta$. Donc l'uniforme continuité sur $\Phi_+$

## Troisième partie

**10a)**

On écrit, pour $(x,y) \in \Pi_+$,

$$\Phi_f(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2}$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(x+u) \frac{du}{u^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\alpha x} \frac{e^{i\alpha u}}{u^2 + y^2}\, du$$

On a donc le résultat avec

$$\boxed{g(y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\alpha u}}{u^2 + y^2}\, du.}$$

**10b)** Selon la question 6, $\Phi_f$ est de classe $C^\infty$, et l'on a $\partial_1^2 \Phi_f + \partial_2^2 \Phi_f = 0$. Remplaçons $\Phi_f$ par sa définition, $\partial_1^2 f(x) g(y) + \partial_2^2 f(x) g(y) = 0$, pour tout $(x,y) \in \Pi_+$.

Comme $f(x) = e^{i\alpha x}$, il vient, pour $y > 0$,

$$\boxed{-\alpha^2 g(y) + g''(y) = 0.}$$

On obtient alors $g(y) = \lambda e^{\alpha y} + \mu e^{-\alpha y}$, avec $\lambda$ et $\mu$ constantes à déterminer.

Selon la question 9, $\Phi_f$ est une fonction uniformément continue sur $\Pi_+$, donc $\lambda = 0$, de plus $\Phi_f(x,y)$ tend vers $f(x)$ si $y$ tend vers 0, donc $\mu = 1$. On a donc

$$\boxed{\Phi_f(x,y) = e^{i\alpha(x+iy)}.}$$

**11)** Avec les notations de la question précédente, on a, si $\alpha = p > 0$,

$$\psi(p) = \frac{\pi}{a} g(a) \text{ et } \psi(-p) = \overline{\psi(p)}.$$

On en déduit

$$\boxed{\psi(p) = \frac{\pi}{a} e^{-|p|a}.}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\psi(p)\,dp$ converge, et l'on peut calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-p(a+iy)}\,dp = \left[\frac{-1}{a+iy} e^{-p(a+iy)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+iy}.$$

Dès lors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\psi(p)\,dp = \left[\int_0^{+\infty} e^{-ipy}\psi(p)\,dp + \int_0^{+\infty} e^{-ip(-y)}\psi(-p)\,dp\right],$$

en faisant le changement de variable $p \mapsto -p$. On obtient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\psi(p)\,dp = \frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{a+iy} + \frac{1}{a-iy}\right]$$

D'où la réponse

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\psi(p)\,dp = \frac{2\pi}{x^2+a^2}.}$$

**12a)** Soit $x \in \mathbf{R}$, on écrit en faisant le changement de variable $u = x + 2\pi - t$,

$$h(x+2\pi) = \int_{\mathbf{R}} f(t)K(x+2\pi-t, y_0)\,dt = \int_{\mathbf{R}} f(x+2\pi-u)K(u, y_0)\,du.$$

On a $f(x+2\pi-u) = f(x-u)$. On en conclut $h(x+2\pi) = h(x)$. La fonction $h$ est donc $2\pi$-périodique.

**12b)** Pour $A \in \mathbf{N}$, on peut écrire

$$\int_{\mathbf{R}} f(x-t)K(t, x_0)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x-t)K(t, y_0)\,dt,$$

puisque cette intégrale converge. On a de plus, $M \in \mathbf{R}_+$,

$$\left|\int_{\mathbf{R}\setminus[-A,A]} f(x-t)K(t, y_0)\,dy\right| \leqslant M \int_{\mathbf{R}\setminus[-A,A]} K(t, y_0)\,dy.$$

Il y a donc convergence uniforme lorsque $A$ tend vers $+\infty$, on peut donc inverser la limite et l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} f(x--t)K(t, y_0)\,dt\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} f(x--t)K(t, y_0)\,dt\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\left(\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x-t)dx\right)K(t, y_0)\,dt
\end{aligned}$$

L'inversion des intégrales est légitimée par le théorème de Fubini. On se concentre sur l'intégrale de 0 à $2\pi$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x-t)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{2\pi-t} e^{-inu}e^{-int}f(u)\,du = e^{-int}\widehat{f}(n).$$

On reporte dans l'expression de $\widehat{h}(n)$. Il vient,

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\int_{\mathbf{R}} e^{-int}K(t,y_0)\,dt = \frac{\pi}{y_0}\widehat{f}(n)e^{-iny_0},$$

selon la question 12.

$$\boxed{\widehat{h}(n) = \frac{\pi}{y_0}\widehat{f}(n)e^{-iny_0}.}$$

**Quatrième partie**

**13)** On utilise la question 9. Montrons que $f$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Selon l'hypothèse $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $R > 0$ tel que si $|x| > R$, alors $|f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. On note dans la suite $E_R = \mathbf{R}\backslash[-R;R]$. On considère alors $K = [-2R;2R]$. Alors $f$ est continue sur le compact $K$, donc y est uniformément continue. Il existe donc $\eta \in ]0;R[$ tel que

$$\forall(x,y)\in K^2,\ |x-y|\leqslant\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\varepsilon$$

.

Soient alors $x$ et $y$ dans $\mathbf{R}$, tels que $|x-y|\leqslant\eta$. On a alors deux cas, soit $x$ et $y$ sont dans $K$, d'où $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$, soit $x$ et $y$ sont dans $E_R$, et donc

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)|+|f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

Dans les deux cas, on a le résultat.

**14)** On procède par découpe en deux. $f$ est continue et converge en $+\infty$. Par conséquent, $f$ est bornée, et l'on note $M = \sup\limits_{\mathbf{R}}|f|$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|t|\geqslant A \Rightarrow |f(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\left|\int_{\mathbf{R}\backslash[-A,A]} f(t)K(x-t,y)\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbf{R}}K(t,y)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ainsi que, pour $y\geqslant0$,

$$\left|\int_{-A}^{A} f(t)K(x-t,y)\,dt\right| = \left|\int_{-A}^{A} f(t)\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\,dt\right|\leqslant\frac{MA}{\pi}\frac{2y}{(x-A)^2+y^2}$$

Puisque, en prenant $x\geqslant A$, $t\mapsto\dfrac{1}{(x-t)^2+y^2}$ est décroissante sur $[-A,A]$. On utilise alors la propriété, valable pour $\alpha$ et $\beta$ réels, $2\alpha\beta\leqslant\alpha^2+\beta^2$. (car $0\leqslant(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$.)

Il vient alors, $\left|\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)K(x-t,y)\,dt\right|\leqslant\dfrac{MA}{\pi(x-A)}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$, pour $x$ assez grand, ($x\geqslant u\geqslant A$).

Dès lors

$$\left|\int_{\mathbf{R}} f(t)K(x-t,y)\,dt\right|\leqslant\varepsilon.$$

Déterminons maintenant $a$. Supposons $y > 0$ et $x$ réel. On a les mêmes majorations que précédemment, $A$ étant fixé pour que $|t|\geqslant A \Rightarrow |f(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left| \int_{\mathbf{R}\setminus[-A,A]} f(t)K(x-t,y)\,dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \int_{-A}^{A} f(t)K(x-t,y)\,dt \right| \leqslant \frac{MA}{\pi} \frac{2y}{(x-A)^2+y^2} \leqslant \frac{2MA}{\pi y}.$$

Ce dernier membre peut être rendu inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ si $y$ est assez grand ($y \geqslant a$). La relation de Chasles donne alors

$$\left| \int_{\mathbf{R}} f(t)K(x-t,y)\,dt \right| \leqslant \varepsilon.$$

**15)** Montrons que $\overline{\Phi}_f(x,y)$ tend vers 0, lorsque $|x|+y$ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, selon la question précédente $(u,a)$ dans $\mathbf{R}_+$ tels que, si $y \geqslant a$ ou $|x| \leqslant u$ alors $\left|\overline{\Phi}_f(x,y)\right| \leqslant \varepsilon$. Posons $M = 2\sup(a,u)$. Alors, si $|x|+y \geqslant M$ on a $|x| \geqslant M/2$, ou $y \geqslant M/2$, donc $|x| \geqslant u$ ou $y \geqslant a$. Il s'ensuit, que, dans ce cas, $\left|\overline{\Phi}_f(x,y)\right| \leqslant \varepsilon$. En conséquence de quoi,

$$\boxed{\lim_{|x|+y \to +\infty} \overline{\Phi}_f(x,y) = 0.}$$

**16)** On note $\|\Phi\|$ la norme de l'application $f \mapsto \Phi_f$. Pour $f$ dans $E_0$, on a pour tout $(x,y) \in \Pi_+$

$$|\Phi_f(x,y)| = \left| \int_{\mathbf{R}} f(t)K(x-t,y)\,dt \right| \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbf{R}} K(x-t,y)\,dt = \|f\|.$$

On en tire $\|\Phi\| \leqslant 1$. Comme il y a égalité dans les inégalités précédentes, pour la fonction $x \mapsto 1$, on en déduit

$$\boxed{\|\Phi\| = 1.}$$