Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

Exercice (CCINP MP)

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$.

Q1. Pour tout couple (m,n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n$, $m < n$ et $m = n$.

Q2. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

Problème 1 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (CCINP PSI)

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k+1$ ou $k-1$.

Soit $p \in]0,1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ une suite de variables aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t. Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

Q1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

Q2. En déduire que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathrm{P}(S_n = 0).$$

Q3. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Q4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q5. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.
Dans cette partie, on souhaite déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?

Q7. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}. En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j.$$

Q8. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **Q2**, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

Q9. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Problème 2 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si la variable aléatoire $X : \omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\overline{z}$ son conjugué.
On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles. Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z)) + i\,\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z)) \ .$$

On admettra que les propriétés usuelles de l'espérance s'étendent aux variables aléatoires complexes.

I - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction Φ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itX}\right) \ .$$

Q 1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. Montrer que, pour tout réel t, $\Phi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k\,\mathrm{e}^{itx_k}$.

Q 2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

Montrer que Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\Phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}$.

Q 3. Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\Phi_X(-t)$ en fonction de $\Phi_X(t)$.

On dit qu'une variable aléatoire est symétrique si X et $-X$ ont même loi. Démontrer que lorsque $X(\Omega)$ est fini, la fonction Φ_X est à valeurs réelles si et seulement si X est symétrique.

Q 5. Déterminer la fonction caractéristique de X lorsque

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1 - p$.
2. X suit la loi géométrique de paramètre p.
3. X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

II - Régularité de Φ_X

On fixe dans cette partie une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et on reprend les notations de la question 2.
On cherche à établir des liens entre des propriétés de la loi de X et la régularité de Φ_X.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre k si la variable aléatoire X^k est d'espérance finie.

II.A –

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette sous-partie III.A que X admet un moment d'ordre k.

N.B : la numérotation des questions suit l'énoncé original (centrale PC) pour faciliter la lecture du corrigé

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant k$. Montrer que pour tout réel x, $|x|^j \leqslant 1 + |x|^k$ et en déduire que X admet un moment d'ordre j.

Q 29. En déduire que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de la dérivée $k^{\text{ième}}$ de Φ_X.

Q 30. En déduire une expression de $\mathbb{E}\left(X^k\right)$ en fonction de $\Phi_X^{(k)}(0)$.

II.B –

On suppose dans cette sous-partie III.B que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q 31. On note f la fonction qui à tout $h > 0$ associe $f(h) = \dfrac{2\Phi_X(0) - \Phi_X(2h) - \Phi_X(-2h)}{4h^2}$. Quelle est la limite de f en 0 ?

Q 32. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

Q 33. En déduire que X admet un moment d'ordre 2.