Corrigé du DS 6 (sujet type CCINP)

EXERCICE (CCINP MP)

Q 4. $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$, on a $T \leq Z$ donc :

▷ Si $m < n$ alors $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$.

▷ Si $m > n$ alors
$$[Z = m] \cap [T = n] = ([X = m] \cap [Y = n]) \cup ([X = n] \cap [Y = m])$$
c'est une réunion d'événements disjoints ainsi
$$\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = m] \cap [Y = n]) + \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = m])$$
par indépendance de X et Y on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) &= \mathbb{P}([X = m])\,\mathbb{P}([Y = n]) + \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}([Y = m]) \\ &= 2p^2q^{n+m}\end{aligned}$$

▷ Si $m = n$ alors
$$[Z = n] \cap [T = n] = ([X = n] \cap [Y = n])$$
et
$$\mathbb{P}([Z = n] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n])$$
l'indépendance de X et Y donne
$$\mathbb{P}([Z = n] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}([Y = n]) = p^2q^{2n}$$
Finalement :
$$\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ p^2q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m > n \end{cases}$$

Q 5. La famille $([T = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a :
$$\mathbb{P}(Z = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n])$$
or si $m < n$ $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$ donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = m) &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) \\ &= p^2q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m} \\ &= p^2q^{2m} + 2p^2q^m\frac{1 - q^m}{1 - q}\end{aligned}$$
ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}(Z = m) = pq^m\ \ (2 - (q + 1)q^m)}$

PROBLÈME 1. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (CCINP PSI)

Partie I – Un développement en série entière

Q 1. C'est un développement en série entière usuel. On a, pour rappel :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Q 2. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité de la question précédente. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x \in]-1,1[$, et on peut donc évaluer en $-x$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x)^n.$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x)^n = (-1)^n x^n$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie II – Probabilité de retour à l'origine

Q 1. Soit $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On montre facilement que $X_t = -1$ si et seulement si $\dfrac{X_t + 1}{2} = 0$, et $X_t = 1$ si et seulement si $\dfrac{X_t + 1}{2} = 1$. Comme X_t ne prend que les valeurs -1 et 1, cela donne l'ensemble des valeurs possibles prises par $\dfrac{X_t + 1}{2}$. Autrement dit : $\left(\dfrac{X_t + 1}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$, ce qui assure déjà que $\dfrac{X_t + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. Pour connaître son paramètre, on calcule la probabilité que $\dfrac{X_t + 1}{2} = 1$:

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_t + 1}{2} = 1\right) = \mathrm{P}(X_t = 1) = p.$$

Donc : $\dfrac{X_t + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Ainsi $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2}$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes grâce au lemme des coalitions (puisque les X_t le sont par hypothèse), donc on sait que $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On remarque que l'on a :

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{n} X_t + \sum_{t=1}^{n} 1\right) = \frac{S_n+n}{2}.$$

On en déduit :

$$S_n = 0 \Longleftrightarrow \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Or : $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(n,p)$, donc en particulier : $\displaystyle\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = [\![0,n]\!]$. On retient surtout que c'est une variable aléatoire à valeurs entières, donc si n est impair, on a $\displaystyle\frac{n}{2} \notin \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega)$, donc : $\displaystyle\mathrm{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}\right) = 0$. Par l'équivalence ci-dessus, on a donc aussi, si n est impair : $\mathrm{P}(S_n = 0) = 0$.
En revanche, si n est pair, alors $\dfrac{n}{2} \in [\![0,n]\!]$ et on a, pour une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\mathrm{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n-n/2} = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}.$$

Ainsi, si n est pair : $\mathrm{P}(S_n = 0) = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}$. Comme $u_n = \mathrm{P}(S_n = 0)$, on a bien montré :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. On pouvait justifier autrement que $u_n = 0$ pour n impair : pour que $(S_n = 0)$ se réalise, du fait que $\displaystyle S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$ soit une somme de 1 et -1, il faut qu'il y ait eu autant de 1 que de -1 dans cette somme, ce qui n'est possible que si la somme a un nombre pair de termes. Comme cette somme a n termes, il faut donc que n soit pair pour que $(S_n = 0)$ se réalise. Par contraposée, si n est impair alors $(S_n = 0)$ est l'évènement impossible.

Q 3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $2n$ est un entier pair, donc on a :

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n.$$

Or, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or l'application $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en $x = \frac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\frac{1}{4}$. Donc, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$.
Deux suites équivalentes ayant même limite, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0.$$

Ainsi, après un temps arbitrairement long, il est presque certain que le mobile ne se trouve pas en l'origine (n'oublions pas que $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les deux suites extraites des indices pairs et des indices impairs ont la même limite, et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$).

Partie III – Nombre de passages par l'origine

Q 4. La variable aléatoire T_n compte le nombre de passages du mobile à l'origine entre le début de l'observation et l'instant $2n$.

Q 5. Comme : $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$, la variable aléatoire O_{2j} suit une loi de Bernoulli. On détermine son paramètre en calculant la probabilité qu'elle soit égale à 1. Or :

$$O_{2j} = 1 \Longleftrightarrow S_{2j} = 0,$$

donc : $\mathrm{P}(O_{2j} = 1) = \mathrm{P}(S_{2j} = 0) = u_{2j} = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. En résumé :

$$O_{2j} \sim \mathcal{B}\left(\binom{2j}{j}(p(1-p))^j\right).$$

Donc : $\mathrm{E}(O_{2j}) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{(j!)^2}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j.$$

Comme $p \neq \frac{1}{2}$, l'étude des variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$ montre qu'on a : $0 \leqslant 4p(1-p) < 1$. Ainsi $4p(1-p)$ appartient à l'intervalle ouvert de convergence du développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{j \geqslant 0} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j$ converge, et que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$. Le membre de droite de cette égalité est croissant (comme fonction de p) sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et décroissant sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (en vérité, le fait que cette quantité reste inchangée en composant par $p \mapsto 1-p$ assure que le graphe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, donc l'étude sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ suffit). Quand $p \to 0^+$, cette quantité vaut 1 et quand $p \to \frac{1}{2}^-$, elle tend vers l'infini.
On en déduit qu'après un temps infini, le mobile passe un nombre fini de fois en moyenne par l'origine : en moyenne une fois environ si p est proche de 0 ou de 1 (ce qui correspondrait logiquement au fait que la position initiale soit l'origine).

Q 7. Notons que si $p = \frac{1}{2}$, alors on a d'après la question **Q 5** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}.$$

Conformément à l'indication de l'énoncé, on va montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors : $\mathrm{E}(T_0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \frac{1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0} = \frac{2\cdot 0+1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0}$. D'où le résultat au rang $n = 0$.

À présent, montrons l'hérédité de cette formule. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$. Alors :

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \mathrm{E}(T_n) + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1}.$$

Et donc, par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(2^2(2n+1)\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\right).$$

Or (l'objectif des calculs qui suivent est de faire apparaître $\binom{2n+2}{n+1}$, conformément à ce qu'on a envie de démontrer) :

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(n!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2(n+1)(2n+1)(n!)^2} &= \frac{1}{2(2n+1)}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1},\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T_{n+1}) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(2(n+1)\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n+2}{n+1}\right) &= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1},\end{aligned}$$

d'où l'hérédité : le résultat au rang n implique le résultat au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$. En reprenant le calcul d'équivalent de la question **Q 3**, on en déduit :

$$\mathrm{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{2^{2n}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n) = +\infty$. Ainsi, en moyenne, la particule passe une infinité de fois par l'origine quand on observe l'expérience pendant un temps arbitrairement long.

Remarque. Nul besoin de passer par un raisonnement par récurrence, si l'on remarque que $\mathrm{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$ est le coefficient général du produit de Cauchy de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n$ par $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}x^n$ (cela tombe bien, on sait expliciter ces deux séries ; pour la première, cela découle de la question **Q 2**). Pour tout x au voisinage de 0, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{E}(T_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-3/2}.$$

Or on sait développer en série entière $x \mapsto (1-x)^{-3/2}$, par exemple en imitant le raisonnement de la question **Q 2** où l'on pose cette fois $\alpha = -\frac{3}{2}$. Mais on va l'obtenir encore plus facilement en exploitant les calculs déjà effectués, puisque $x \mapsto (1-x)^{-3/2}$ n'est rien d'autre que la dérivée de $x \mapsto 2(1-x)^{-1/2}$ dont on connaît déjà le développement en série entière. En le dérivant terme à terme, on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad (1-x)^{-\frac{3}{2}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(n+1)x^n,$$

d'où, pour tout x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{E}(T_n)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)n!n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}2^2\frac{(n+1)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n,\end{aligned}$$

donc par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

Cette approche n'est bien entendu pas plus élémentaire que celle proposée par l'énoncé, mais elle est relativement rapide et a l'avantage de donner la valeur de $\mathrm{E}(T_n)$ recherchée sans avoir la moindre idée de sa valeur *a priori* (ce qui était le cas de votre serviteur).

PROBLÈME 2. Fonction caractéristique (Centrale PC)

I - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

L'énoncé propose ici de généraliser la notion de fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète au delà des variables à support dans $\mathbb{N}$*.*

I.A – Premières propriétés

Q 1. Par application de la formule de transfert dans le cas où $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout réel t :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k)\, f(x_k) = \sum_{k=1}^{r} a_k\, \mathrm{e}^{itx_k}\,.$$

Q 2. Soit $t \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est (absolument) convergente (de somme 1), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n$ donc $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$ converge absolument. On applique alors la formule de transfert à nouveau, dans le cas où $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable : $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$ converge absolument et $\Phi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$.

Ainsi, Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Remarque : si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut compléter ce support en une famille dénombrable avec des valeurs entières arbitraires que X ne prend presque sûrement jamais. On supposera par la suite, sauf mention particulière du sujet, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable, ce qui est le cas le plus compliqué et ce qui évite le caractère répétitif de deux raisonnements quasi identiques.

On peut remarquer que, dans **Q 2.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ |a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n \ \text{ (majoration uniforme)}$$

donc la série de fonctions continues $\left(f_n : t \mapsto a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}\right)_{n\geq 0}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme, Φ_X, est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'un support fini, il ne s'agit que d'une somme finie de fonctions continues.

Q 4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par application du théorème de transfert, là encore, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{it(ax_n+b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{iatx_n}\, \mathrm{e}^{itb} = \Phi_X(at)\, \mathrm{e}^{itb}\,.$$

Q 5. On suppose, comme préalablement expliqué, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable. Soit $t \in \mathbb{R}$: :

$$\Phi_X(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{i(-t)x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \overline{\mathrm{e}^{itx_n}} = \overline{\Phi_X(t)}\,.$$

Ainsi, Φ_X est paire si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(-t) = \Phi_X(t)$, c'est-à-dire si et seulement si $\Phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

I.B – Trois exemples (tirés directement du cours !)

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[\,$; si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, X suit la même loi qu'une somme $X_1 + \ldots X_n$ de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(q\mathrm{e}^{i0t} + p\mathrm{e}^{i1t}\right) = \left(q + p\mathrm{e}^{it}\right)^n\,.$$

Q 7. Soient $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}\mathrm{e}^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} p\mathrm{e}^{it}\left(q\mathrm{e}^{it}\right)^{n-1} = \frac{p\mathrm{e}^{it}}{1-q\mathrm{e}^{it}}$$

(somme des termes d'une série géométrique de raison $q\mathrm{e}^{it}$ de module $q<1$).

Q 8. Soient $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{int} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda\mathrm{e}^{it}\right)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\exp\left(\lambda\mathrm{e}^{it}\right)$$

(somme des termes de la série exponentielle pour l'exposant $\lambda\mathrm{e}^{it}$).

I.C – Image de Φ_X

Q 9. On peut supposer, par défaut, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n$ (terme général d'une série convergente) donc, par majoration terme à terme de ces séries absolument convergentes, on a :

$$|\Phi_X(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\,.$$

Q 10. On suppose que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_n = a + \dfrac{2\pi k_n}{t_0}$. On a alors :

$$|\Phi_X(t_0)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\exp(it_0x_n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{iat_0}\,\exp(i2\pi k_n)\right| = \left|\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\mathrm{e}^{iat_0}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\,.$$

Q 11. On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi_X(t_0)| = 1$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_X(t_0) = \mathrm{e}^{i\theta}$. En posant $a = \dfrac{\theta}{t_0}$, on a :

$$\Phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\exp(it_0x_n) = \mathrm{e}^{iat_0} \Rightarrow \Phi_X(t_0)\mathrm{e}^{-iat_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\exp(i(t_0x_n - t_0a)) = 1\,.$$

Q 12. En particulier, la partie réelle de $\Phi_X(t_0)$ vaut 1 et donc :

$$\mathrm{Re}(\Phi_X(t_0)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\cos(it_0x_n) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(1-\cos(t_0x_n - t_0a)) = 0\,.$$

Q 13. Comme cette série est à termes positifs, cette somme n'est nulle que si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n\,(1-\cos(t_0x_n - t_0a)) = 0 \Rightarrow a_n = 0 \text{ ou } \cos(t_0(x_n - a)) = 1$$

donc, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. On peut donc conclure à la propriété réciproque de la question **Q 10** sur le support de X dans le cas où Φ_X n'est pas toujours de module strictement inférieur à 1 en dehors du point 0 :

$$\mathbb{P}\left(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = x_n \text{ et } X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathbb{1}(x_n) = 0\,\text{(formule des probabilités totales)}$$

(où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice de la partie complémentaire de $a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$) donc $\mathbb{P}\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

II - Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II.A – Première méthode

II.A.1) – On suppose que et on reprend les notations de la question 1.

Q 15. $X(\Omega)$ est supposé fini . Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$:

$$V_m(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Phi_X(t)\, \mathrm{e}^{-imt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sum_{n=1}^{r} \mathrm{e}^{ix_n t}\, \mathbb{P}(X = x_n)\, \mathrm{e}^{-imt}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_n)\, \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{i(x_n-m)t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Cette dernière intégrale vaut $2T$ si $x_n = m$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{i(x_n-m)T} - \mathrm{e}^{-i(x_n-m)T}}{i(x_n-m)} = \dfrac{2i\sin((x_n-m)T)}{i(x_n-m)}$ sinon ; cette disjonction de cas est identique à celle de la définition du sinus cardinal : $\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{i(x_n-m)t}\, \mathrm{d}t = 1$ si $(x_n - m)T = 0$ et $\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{i(x_n-m)t}\, \mathrm{d}t = \dfrac{\sin((x_n-m)T)}{T(x_n-m)} = \mathrm{sinc}(T(x_n-m))$ si $(x_n-m)T \neq 0$:

$$V_m(T) = \sum_{n=1}^{r} \mathrm{sinc}(T(x_n-m))\, \mathbb{P}(X = x_n)\,.$$

Q 16. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. Si $x_n = m$, $\mathrm{sinc}(T(x_n-m))\, \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(X = m)$ pour tout $T > 0$.
Si $x_n \neq m$, $T \mapsto \sin(T(x_n-m))\, \mathbb{P}(X = x_n)$ est bornée sur $]0, +\infty[$ alors que $|T(x_n-m)| \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par quotient de limites, on a :

$$\mathrm{sinc}(T(x_n-m))\, \mathbb{P}(X = x_n) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ainsi, que m appartienne ou non au support de X (disjonction de cas, identique pour la question 20), par somme de ces r limites, on a :

$$V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = m)\,.$$

II.A.2) – On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \mathrm{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right) \mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 17. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$ de fonctions continues sur le segment $[-T, T]$ converge normalement donc uniformément ce qui justifie le théorème d'interversion entre la somme et l'intégrale sur ce segment ; comme dans la question 15, on obtient :

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sinc}(T(x_n-m))\, \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)\,.$$

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque sinc est continue sur $\mathbb{R}$, par composition avec la fonction inverse, g_n est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus, par quotient de limites, sin étant bornée, sinc admet pour limite 0 en $+\infty$. Ainsi, par composition de limites, g_n se prolonge par continuité en 0 en une fonction $\tilde{g_n}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\tilde{g_n}(0) = \mathbb{P}(X = m)$ si $x_n = m$ et 0 sinon.

Q 19. Comme le sinus cardinal est bornée et admet un pour maximum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{g_n}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, avec $\|\tilde{g_n}\|_\infty \leq \mathbb{P}(X = x_n)$ (la majoration suffit). Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \tilde{g_n}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers sa fonction somme et $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 20. Par continuité de G en 0 et composition des limites, on a :

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}\left(\frac{1}{T}\right) = G\left(\frac{1}{T}\right) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} G(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}(0) = \mathbb{P}(X = m)\,.$$

II.A.3) – Application

Q 21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\Phi_X = \Phi_Y$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = m) = \lim_{T\to+\infty} V_m(T) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Phi_X(t)\, \mathrm{e}^{-imt}\, \mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Phi_Y(t)\, \mathrm{e}^{-imt}\, \mathrm{d}t = \mathbb{P}(Y = m)\,.$$

II.B – Deuxième méthode

Q 22. La série exponentielle est de rayon de convergence infini donc, pour tout $t \neq 0$ en particulier, on a :

$$\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(itb)^n}{n!} - \frac{(ita)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}(b^n - a^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}(b^n - a^n)$$

$$\Rightarrow K_{a,b} = \frac{\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita}}{2it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n\ \left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{2\,(n+1)!}\, t^n$$

de terme constant $\dfrac{b-a}{2}$.
Ainsi, $K_{a,b}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence infini) et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q 23. Soit N un entier naturel non nul (le cas $N = 0$ étant sans intérêt). F_N est une fonction de type intégrale à paramètre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto K_{a,x}(t)$ est continue sur le segment $[-N, N]$ donc intégrable ; pour tout $t \in [-N, N]$, $x \mapsto K_{a,x}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{itx}}{2it} - \dfrac{\mathrm{e}^{ita}}{2it} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{x-a}{2} & \text{si } t = 0, \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{itx} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0, \end{cases}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{itx}$, continue donc intégrable par rapport à t sur le segment $[-N, N]$; enfin, il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{2}$ continue donc intégrable sur $[-N, N]$ telle que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-N, N]$, $\left|\dfrac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x}\right| \leq \varphi(t)$ donc F_N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$F_N'(x) = \int_{-N}^{N} \frac{\partial K_{a,x}}{\partial x}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2ix}\ \left(\mathrm{e}^{iNx} - \mathrm{e}^{-iNx}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{2N}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} = N \operatorname{sinc}(Nx)\ .$$

Q 24. On remarque que $F_N(a) = 0$; on a donc, puisque F_N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = F_N(b) = F_N(a) + \int_a^b F_N'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b N \operatorname{sinc}(Nx)\,\mathrm{d}x = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$$

par le changement de variable $x \mapsto s = Nx$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q 25. Puisque sinc est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur $[0, \pi]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente.
De plus, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$, on a :

$$\int_\pi^x \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \int_\pi^x \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{\cos s}{s}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^x \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

par intégration par parties ($u(s) = \dfrac{1}{s}$ et $v(s) = -\cos s$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi, +\infty[$). Or pour tout $s \in [\pi, +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos s}{s^2}\right| \leq \dfrac{1}{s^2}$, continue et intégrable sur $[\pi, +\infty[$ (critère de Riemann), cette dernière intégrale est absolument convergente donc admet une limite quand $x \to +\infty$ (ainsi que $\dfrac{\cos x}{x}$!) : $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$ est elle aussi convergente.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente.

Q 26. On admet : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$. De plus, la fonction sinc est paire, par quotient de fonctions impaires sur $\mathbb{R}^*$, on a aussi : $\displaystyle -\lim_{x\to-\infty} \int_0^x \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^0 \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$.
Enfin, $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{Nb} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{Na} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$, ce qui conduit par composition de limites, à la disjonction de cas suivant si a et b sont nuls ou suivant leurs signes (strictes) respectifs, dans le cas où $a < b$: $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $a < b < 0$ ou $0 < a < b$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ si $0 = a < b$ ou $a < b = 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \pi$ si $a < 0 < b$.

Q 27. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les réels a et b n'appartiennent pas à $X(\Omega)$.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-N}^{N} \Phi_X(-t)\ K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-N}^{N} \sum_{k=1}^{r} a_k\,\mathrm{e}^{-itx_k}\ K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi} \int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi} \int_{N(a-x_k)}^{N(b-x_k)} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k)\ \mathbb{1}(a < x_k < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

car, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $a - x_k$ et $b - x_k$ ne sont pas nuls par hypothèse, donc

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{N(a-x_k)}^{N(b-x_k)} \operatorname{sinc}(s)\, \mathrm{d}s = \begin{cases} \pi & \text{si } a < x_k < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

III - Régularité de Φ_X

III.A –

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq k$. Soit $x \in \mathbb{R}$: si $|x| \leq 1$, $|x|^j \leq 1 \leq 1 + |x|^k$ et si $|x| > 1$, $|x|^j \leq |x|^k \leq 1 + |x|^k$. Ainsi, $|x|^j \leq 1 + |x|^k$.

Par conséquent, par majoration du terme général d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente (par somme de séries convergentes), on a : $\sum_{n \geq 0} a_n\, |x_n|^k$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ convergent donc $\sum_{n \geq 0} a_n\, x_n^j$ absolument et X admet un moment d'ordre j.

Q 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ de $\mathcal{C}^j$ sur $\mathbb{R}$ avec $f_n^{(j)} : t \mapsto a_n\, (ix_n)^j\, \mathrm{e}^{itx_n}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|a_n\, (ix_n)^j\, \mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n\, |x_n|^j$ (majoration uniforme par le terme général d'une série numérique convergente) : la série de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)_{n \geq 0}$ converge normalement (donc simplement si $j < k$ et uniformément si $j = k$) sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme, Φ_X, est continue sur $\mathbb{R}$. Par application du théorème de dérivation (terme à terme) d'une série de fonction, la fonction somme Φ_X de la série de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \Phi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, i^k\, x_n^k \mathrm{e}^{itx_n}\,.$$

Q 30. D'après la question précédente, on a donc :

$$\Phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, i^k\, x_n^k = i^k\, \mathbb{E}\left(X^k\right) \Rightarrow \mathbb{E}\left(X^k\right) = (-1)^k\, i^k < \Phi_X^{(k)}(0)\,.$$

III.B –

Q 31. Φ_X est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc Φ_X admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (Taylor-Young) :

$$2\Phi_X(0) - \Phi_X(2h) - \Phi_X(-2h) \underset{h \to 0}{=} 2\Phi_X(0) - \left(\Phi_X(0) + \Phi_X'(0)(2h) + \frac{\Phi_X''(0)}{2}(2h)^2\right)$$

$$- \left(\Phi_X(0) + \Phi_X'(0)(-2h) + \frac{\Phi_X''(0)}{2}(-2h)^2\right) + \circ\left(h^2\right) = 4\, h^2\, \Phi_X''(0) + \circ\left(h^2\right) \Rightarrow f(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \Phi_X''(0)\,.$$

Q 32. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Par combinaison linéaire de séries convergentes, on :

$$f(h) = \frac{1}{4\, h^2}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{2ihx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-2ihx_n}\right) = \frac{1}{4\, h^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \left(2 - 2\cos(2hx_n)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4\, h^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, 4\sin^2(hx_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}\,.$$

Q 33. Soit $N \in_N$: pour tout $h > 0$, $\sum_{n=0}^{N} a_n\, x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) = f(h)$ (somme partielle d'une série à termes positifs), donc par prolongement des inégalités, on a :

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n\, x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x_n^2 = S_N \leq \Phi_X''(0)\,.$$

Par majoration des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} a_n\, x_n^2$ (à termes positifs), la série converge (absolument) et X admet un moment d'ordre 2.

III.C –

Q 34. Avec les notations de la question **Q 2.**, $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x_n^{2k}$, série à termes positifs, donc si α est nul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(X = x_n\right)\, x_n^{2k} = 0$ donc X est presque sûrement nulle.

Q 35. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y(\Omega) = X(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(Y = x_n\right) = \dfrac{a_n\, x_n^{2k}}{\alpha}$. On remarque, en particulier, que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = x_n\right) = 1$ et donc que la loi de Y est bien définie.

Par application de la question **Q 29.**, avec les hypothèses proposées, Φ_X, est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X^{(2k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (-1)^k\, x_n^{2k} \mathrm{e}^{itx_n} = \alpha\, (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = x_n\right)\, \mathrm{e}^{itx_n}$$

donc $\Phi_Y = \dfrac{1}{\alpha}\, (-1)^k\, \Phi_X^{(2k)}$ donc Φ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q 36. D'après **III.B**, Y admet un moment d'ordre 2 avec $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = x_n\right)\, x_n^2 = \dfrac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = x_n\right)\, x_n^{2k+2}$donc X admet un moment d'ordre $2k+2$.

Q 37. Par une récurrence simple, on montre alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si Φ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$, alors X admet un moment d'ordre $2k$: l'initialisation a été établie pour $k = 1$ en **III.B** et, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, si on suppose la propriété établie au rang k et que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$ sur $\mathbb{R}$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ et X admet un moment d'ordre $2k$ par hypothèse de récurrence et X admet un moment d'ordre $2k+2$ d'après la question précédente (hérédité). On peut donc conclure par principe de récurrence à cette propriété pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

IV - Développement en série entière de Φ_X

IV.A –

Q 38. $X(\Omega)$ est supposé fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$; on a, pour tout réel t, puisque la série exponentielle est de rayon de convergence infini :

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k\, \mathrm{e}^{itx_k} = \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itx_k)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k\, x_k^n \right) \frac{i^n}{n!}\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}\, \mathbb{E}\left(X^n\right)\, t^n$$

par linéarité des sommes de séries convergentes.

Ainsi Φ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^n}{n!}\, \mathbb{E}\left(X^n\right)$.

IV.B –

Q 39. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$. Par application de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} = \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!}\, i^{n+1}\, \mathrm{e}^{ix}\, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left| \mathrm{e}^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \left| \int_0^y \left| \frac{(y-x)^n}{n!}\, i^{n+1}\, \mathrm{e}^{ix} \right| \mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^y \frac{|y-x|^n}{n!}\, \mathrm{d}x \right| = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Q 40. Soit $t \in \left[-\dfrac{R}{\mathrm{e}}, \dfrac{R}{\mathrm{e}} \right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \Phi_X(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\, \mathbb{E}\left(X^k\right) \right| = \left| \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itX)^k}{k!} \right) \right| \leq \mathbb{E} \left| \mathrm{e}^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itX)^k}{k!} \right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \frac{|t|^{n+1}\, \mathbb{E}|X|^{n+1}}{(n+1)!}$$

qui, d'après l'hypothèse proposée et la formule de Stirling est $\bigcirc\left(|t|^{n+1}\, \dfrac{(n+1)^{n+1}}{R^{n+1}}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}\, \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right)$ et donc $\bigcirc\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$ quand $n \to +\infty$.

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!}\,\mathbb{E}\left(X^n\right)$ converge vers $\Phi_X(t)$ et on a : $\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!}\,\mathbb{E}\left(X^k\right)$.