Calcul différentiel

Un peu d'histoire : les 23 problèmes de Hilbert

Lors du deuxième congrès international de mathématiques tenu à Paris en 1900, le grand mathématicien allemand David Hilbert présenta une liste de 23 problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec. Ces problèmes devaient, selon Hilbert, marquer le cours des mathématiques du XXe siècle, et l'on peut dire aujourd'hui que cela a été grandement le cas. La liste définitive fut publiée après la tenue du congrès et est aujourd'hui communément appelée liste des problèmes de Hilbert. Parmi ces problèmes, quelques uns restent encore ouverts aujourd'hui. C'est le cas de la célèbre hypothèse de Riemann sur la fonction dzêta (8eme problème). D'autres ont connu une solution inattendue comme par exemple l'hypothèse du continu (voir article sur Cantor). Si certains de ces problèmes sont incompréhensibles pour les non spécialistes, d'autres abordent des questions plus philosophiques que mathématiques comme le problème 6 qui propose de construire une axiomatisation mathématique de la physique, ou le problème 2 qui demande d'établir la consistance de l'arithmétique. Car en plus d'avoir produit des résultats mathématiques exceptionnels, Hilbert s'est intéressé aux questions philosophiques relatives à leur fondement et leur justification. Favorable à la méthode axiomatique, il a proposé un programme de recherche (programme de Hilbert) ayant pour ambition de fonder entièrement les mathématiques à partir de la logique formelle. Les travaux ultérieurs de Gödel montreront que cette ambition était démesurée, et conduiront à l'abandon du programme. Cependant la méthode axiomatique perdurera, particulièrement à travers les travaux du groupe de mathématiciens français Bourbaki.

Questions de différentiabilité, et d'existence de dérivées partielles

1. On considère un espace vectoriel normé E. On pose $f(x) = \|x\|$.
   Etudier l'existence de la limite de $\dfrac{f(tx)}{t}$ quand t tend vers 0.
   En déduire que la norme n'est jamais différentiable en 0.

2. Soit la fonction
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^6 + (x^2-y)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Déterminer la limite quand t tend vers 0 de $f(t,t^2)$. En déduire que n'est pas continue en 0.

   Montrer que malgré tout, cette fonction possède une dérivée selon le vecteur $\vec{u} = (a,b)$ pour tout (a,b) non nul.

3. Soit une fonction f définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   (a) Etablir la majoration $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$
   (b) Démontrer que f est continue en $(0,0)$.
   (c) Démontrer que $f(x,y) = f(0,0) + o(\|(x,y)\|)$. Qu'en déduit on pour l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$?
   (d) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ et en déduire que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et le calculer.
   (e) Par un argument de symétrie déterminer sans calcul $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$
   (f) La fonction f est elle de classe C^2 ?

4. *classique.* Soit n un entier non nul.Etudier la différentiabilité et les dérivées partielles pour l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ e^x \text{ si } x = y \end{cases}$$
   On aura intérêt à introduire la fonction $g(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$

5. Calculer la différentielle $df(a)$ des fonctions f suivantes en un point a du domaine de définition.
   (a) $f(x,y,z) = x+y+z$, $a = (x_0, y_0, z_0)$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $a - (x_0, y_0)$.
   (c) $f(x,y) = (e^x \cos y, \sin y)$, $a = (0,0)$.
   (d) $f(M) = \mathrm{tr}(M^2)$ (M matrice) $a = M_0$ matrice donnée quelconque.
   (e) $f(M) = M^{-1}$ $a = I_n$. (plus difficile)

6. Différentielle du déterminant.
   (a) Soit A une matrice carrée. Déterminer à l'aide de la comatrice de A le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $f(t) = \det(A + tE_{i,j})$
   (b) Démontrer que le déterminant est une application différentiable et calculer sa différentielle en A.

7. Différentiabilité et convexité.
   Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.
   Démontrer que f est convexe si et seulement si pour tout couple a, b on a
   $$f(b) - f(a) \geq (\nabla f(a)|(b-a))$$
   Indication : poser pour $t \in [0,1]$, $g(t) = f(a + t(b-a))$ et calculer la dérivée de cette fonction d'une variable réelle.

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
   $$\forall x, y,\ |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$$
   .
   Démontrer que f est nulle. (on montrera que f est différentiable et on calculera sa différentielle).

9. soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k lipschitzienne. Montrer que pour tout x, $||\nabla f(x)|| \leq k||x||$

10. (a) Montrer que la fonction $f(x,y) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x + y\cos t)dt$. est définie sur l'ouvert $\{(x,y), |y| < x\}$.
   (b) Justifier qu'elle possède des dérivées partielles sur ce domaine et donner leur expression intégrale (utiliser le théorème de Leibniz).
   (c) Calculer explicitement les dérivées partielles et trouver une équation aux dérivées partielles vérifiée par f.

11. Etudier le domaine de définition et l'existence des dérivées partilles de l'application f définie par :
   $$f(x,y) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$
   Cette fonction est elle C^1 ?

12. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique.
   (a) On note f_i la i eme coordonnée de f. On note $a_{i,j,k} = \partial_i \partial_j f_k$. Démontrer les égalités : $a_{i,j,k} = -a_{i,k,j}$ et $a_{i,j,k} = a_{j,i,k}$.
   (b) En déduire que tous les $a_{i,j,k}$ sont nuls.
   (c) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.

   indication : procéder comme dans l'exercice précédent

   Dérivées partielles. Equations aux dérivées partielles

13. Manipulation des dérivées partielles.
   (a) Soit f une fonction de classe C^1. On pose $F(x,y) = f(x^2 + y^2)$.
   Montrer que $y\dfrac{\partial F}{\partial x} = x\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

(b) Quelle est la dérivée en zéro de $x \mapsto f(0,x) + f(x,x^2)$

(c) Soient f et g deux fonctions C^1 vérifiant l'égalité $f(x,y,g(x,y)) = 0$. On suppose que les dérivées partielles de f ne s'annulent pas.
Exprimer les dérivées partielles premières de g en fonction de celles de f.

(d) Trouver les fonctions de la forme $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$ telles que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

.

(e) Trouver une condition sur les dérivées partielles de f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ pour qu'il existe une constante C vérifiant pour tout couple x, y de réels non nuls :

$$f(\arctan \frac{y}{x}, \arctan \frac{x}{y}) = C$$

14. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$ .On pose $u(x,y) = \cosh x \sin y$ et $v(x,y) = \sinh x \cos y$.

(a) Calculer la jacobienne de $f = (u,v)$. Vérifier qu'elle est inversible.

(b) Vérifier que les fonctions u et v ont un laplacien nul (on dit qu'elles sont harmoniques)

(c) Soit g une application quelconque et h la composée $g \circ f$. Calculer le lalacien de h à l'aide du Laplacien de g et des dérivées partielles de u et v.

15. Etude de l'application $f : (x,y) \mapsto (s(x,y) = x+y, p(x,y) = xy)$.

(a) Déterminer sa matrice jacobienne au point (x,y).

(b) On considére l'ouvert $O = \{(x,y), x < y\}$. Démontrer que si (a,b) vérifient $a^2 > 4b$ il existe un unique $(x,y) \in 0$ tel que $f(x,y) = (a,b)$.

(c) En déduire que f est bijective de 0 sur son image, et calculer de deux façons différentes la matrice jacobienne de f^{-1}.

16. *difficile.* (généralise le précédent) :
Soit $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$.
On considére l'application de classe $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui à un n uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ associe le n uplet

$$(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n))$$

constitué des n fonctions symétriques de $(x_1, \ldots, x_n)$.

(a) Montrer que le déterminant Jacobien de f s'exprime simplement en fonction du determinant de Vandermonde des x_i

(b) Déterminer un ouvert $U \subset \Omega$ sur lequel f est injective.

(c) (HP) En utilisant le théorème d'inversion globale, qu'en déduit on pour l'application qui a un polynôme de degré n scindé àracines simples associe la suite ordonnée de ses racines ?

Exemples d'équations aux dérivées partielles.

17. Exemple de primitivation
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 4yz + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4zx + x^2 + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4yz + y$$

Peut on remplacer la dernière égalité par $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$?

18. Trouver les fonction f de la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$ qui sont solution de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x}$

19. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
(indication : on cherchera un changement de la forme $u = x + ay, v = x + by$ avec a, b constantes distinctes tel que la fonction $g(u,v)$ définie par $f(x,y) = g(u,v)$ soit solution l'éauation en $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$)
Deux fonctions d'une variable h et k étant données etudier l'existence d'une solution f vérifiant les conditions : $f(x,0) = h(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = k(y)$.

20. généralisation du précédent. Résoudre

$$u\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + w\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

avec $v^2 > 4uw$ puis avec $v^2 = 4uw$

21. Résoudre l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$ sur l'ouvert $x > 0$ en passant en polaires.

22. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (passer en polaires)

23. Fonctions homogènes.

    (a) Soit α un réel positif. Une fonction f C^1vérifiant pour tout (x, y) et pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ s'appelle une fonction α homogène. Etablir que si f est α homogène alors on a l'égalité :(E) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ et montrer que les dérivées partielles de f sont $(\alpha - 1)$ homogènes.

    (b) Quelles sont les fonctions continues 0 homogènes ? En déduire toutes les fonctions C^1 1 homogènes.

    (c) Réciproquement on se donne une fonction f vérifiant sur l'ouvert $x > 0$ l'équation (E) . Montrer que f est α homogène.

24. Traiter l'exercice précédent avec n variables. //

25. (mines) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\cdot$ Etablir l'existence de $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(y - x)$.

26. (mines) Trouver les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que
    $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \mapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ vérifie :
    $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \lambda g = 0.$

Problèmes d'extrema

27. Etudier les extrema des applications suivantes. Dans chaque cas, on déterminear le domaine de définition, on étudiera ensuite les points critique, puis on utilisera soit un argument global, soit la matrice Hessienne, pour conclure.

    (a) $f_1 : (x, y) \to (x^2 + ay^2)e^{-(x^2+y^2)}$

    (b) $f_2 : (x, y) \to \cos(x)\sqrt{1 - y^2}$

    (c) $f_3 : (x, y) \to x^2 + xy^2$

28. *classique.* Trouver les extrema de l'application définie, pour $x > 0, y > 0$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$$

29. *classique.* Extrema globaux de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur la boule fermée $B(O, 2)$

30. (centrale)
    Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout x, $(\nabla f(x)|x) \geq 0$.
    Montrer que $f(0)$ est un minimum absolu pour f

31. *classique.* Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\dfrac{f(x)}{||x||}$ tend vers l'infini quand $||x||$ tend vers l'infini.
    a)Montrer que f possède un minimum, puis montrer qu'il existe x tel que $\nabla f(x) = 0$
    b) Soit y un vecteur de $\mathbb{R}^n$. En considérant $g(x) = f(x) - (x|y)$ Montrer que l'application ∇f est surjective.

32. *classique.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $x \in E$. Montrer que la fonction $\varphi : y \in E \ \mapsto\ \langle x, y\rangle - \langle u(y), y\rangle$ présente un maximum que l'on demande de déterminer.
cet exercice très classique peut aussi se traiter matriciellement

33. Trois points A, B, C du plan étant donnés, trouver les extrema de la fonctions
$$M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$$

34. (mines) Soit ABC un triangle du plan euclidien de côtés a, b, c, de périmètre p et d'aire S.
On admet que l'on a l'égalité suivante (formule de Héron) :
$$S = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$$
en utilisant le théorème des extrema liés, démontrer que les triangles d'aire maximale à périmètre constant sont équilatéraux. En déduire $S \leq \dfrac{p^2}{12\sqrt{3}}$

35. *difficile.* Billard Elliptique.
    (a) Soient a, b deux points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la différentielle de l'application définie sur R^2 par $x \mapsto ||x-a|| + ||x-b||$.
    (b) On considère une ellipse $\mathcal{E}$ du plan. Montrer que l'application f définie sur $\mathcal{E}^3$ par $f(x_1, x_2, x_3) = ||x_1 - x_2|| + ||x_2 - x_3|| + ||x_3 - x_1||$ possède un maximum atteint en un triplet (x_1, x_2, x_3) d'éléments distincts.
    (c) Montrer l'existence d'une trajectoire de billard fermée à 3 rebond sur l'ellipse $\mathcal{E}$

36. Extrema liés : cas de la sphère euclidienne.

    Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On note $S = \{x, ||x|| = 1\}$
    (a) Soit $a \in S$. et u un vecteur unitaire orthogonal à a. Construire explicitement un arc γ tracé sur S tel que $\gamma(0) = a, \gamma'(0) = u$.
    (b) Soit f une fonction définie sur un ouvert de E contenant S et de classe C_1. Déduire de la question précédente que si f présente en a un extremum relatif à S alors $\nabla f(a)$ est colinéaire à a.

    théorème des extrema liés sur une sphére

37. Applications du théorème des extrema liés à la sphère.
    (a) Déterminer le maximum de $x_1 + \ldots + x_n$ sur la sphére de $\mathbb{R}^n$. Retrouver l'inégalité arithméticogéométrique
    (b) Soit u un endomorphisme symétrique.
    (i) Jusitifier l'existence de l'existence du maximum a l'application $x \mapsto (u(x), x)$ sur la sphère unité.
    (ii) Soit y un vecteur en lequel ce maximum est atteint. Montrer que pour tout vecteur x on a $(u(y) - ay|x) = 0$
    (iii) Montrer que u possède au moins une valeur propre réelle (on en déduit alors facilement le théorème spectral)

38. Les différents exercices regroupés ici peuvent se traiter à l'aide du théorème des extrema liés, ou bien de façon autonome.
    (a) Déterminer le volume maximal d'une boite parallélepipédique de surface constante Σ.
    (b) (mines) Montrer que l'ensemble d'équation $y^2(2-y^2) = x^2(x-2)(x-1)$ est un compact, et trouver la norme maximale d'un élément de cet ensemble
    (c) Trouver l'aire maximale d'un polygône régulier inscrit dans le cercle unité.
    (d) Démontrer que la normale en un point M d'une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' est la bissectrice des deux segment MF et MF'

39. *difficile.* (ENS)
Trouver : $\displaystyle\sup_{|z_1|\leq 1, \ldots, |z_n| \leq 1} \prod_{i<j} |z_i - z_j|$

Divers classiques (souvent plus difficiles)

40. Fonctions harmoniques :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite harmonique si son laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ est nul.

Cet exercice propose d'étudier quelques propriétés de ces fonctions.

(a) Un exemple assez général :
Soit $F(z)$ une série entière de rayon R non nul. On pose $g(x,y) = \mathrm{Re}F(x+iy)$. Montrer que g est harmonique.
On peut montrer la réciproque de ce résultat en utilisant la théorie des séries de Fourier.

(b) Soit f une fonction de classe C^2 vérifiant l'égalité intégrale suivante :
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos t, y + r\sin t)dt$$
pour tout x, y et tout r positif assez petit.

(i) Montrer sans calcul que la fonction f ne possède pas d'extremum local strict.
(ii) Montrer que f est harmonique.
indication : on dérivera deux fois l'égalité précédente par rapport à r

(c) Le principe du maximum
Soit U une fonction harmonique sur le disque unité fermé.
(i) Pour ϵ strictement positif, montrer que $f(x,y) + \epsilon(x^2+y^2)$ n'a pas de maximum local.
indication : on supposera qu'il y en a un, et on étudiera la hessienne en ce point
(ii) On prend $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ et on note $a_n = (x_n, y_n)$ un point ou la fonction précédente atteint son maximum. Ce point est donc sur le cercle unité d'après ce qui précède. En utilisant la suite (a_n) montrer que f atteint son maximum sur le cercle unité.

41. Vecteurs tangents à $SO_n(\mathbb{R})$

(a) Soit $t \to \gamma(t)$ une application de classe C^1 à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\gamma(0) = I$. Montrer que la matrice $\gamma'(0)$ est antisymétrique

(b) Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $SO_n(\mathbb{R})$ au point I_n est exactement l'ensemble des matrices antisymétriques.

42. *difficile.* (ENS)
Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{tr}\, M, \mathrm{tr}\, M^2, \ldots, \mathrm{tr}\, M^n) \in \mathbb{R}^n$.
a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est différentiable en M et calculer $df_M(H)$ pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $rgdf_M = deg\mu_M$ où μ_M est le polynôme minimal de M.
c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal égale le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.