I. CCP (Joseph)

Exo A Exercice 9 (analyse) de la banque.

Exo B Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme orthogonal sur E.

1. Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal.
2. Soit x dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et y dans $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$; montrer que $(x\,|\,y)=0$
3. En déduire que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ sont deux sous espaces supplémentaire orthogonaux de E.

Corrigé

1. Un endomorphisme orthogonal est un endomorphisme qui conserve la norme ($\|f(x)\|=\|x\|$ pour tout $x\in E$). On sait qu'il est équivalent de dire que f conserve le produit scalaire ($\big(f(x)\,|\,f(y)\big)=(x\,|\,y)$ pour tout $(x,y)\in E^2$).
2. Par définition de x et y, on a $f(x)=x$; et il existe $z\in E$ tel que $y=f(z)-z$. Puisque f respecte le produit scalaire, on en déduit :
$$(x\,|\,y)=\big(x\,|\,f(z)\big)-(x\,|\,z)=\big(f(x)\,|\,f(z)\big)-(x\,|\,z)=0$$
3. La question précédente montre que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux, donc en somme directe, donc que la dimension de leur somme est la somme de leurs dimensions.
La formule du rang montre que la somme de leurs dimensions vaut $\dim E$. Finalement, on a donc bien $\quad \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)=E$.

II. CCP (Foucault)

Exo A ?

Exo B Pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$N(A)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\quad\text{et}\quad N'(A)=\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$$

1. Montrer que N et N' sont des normes.
2. Montrer que N et N' sont équivalentes.
3. Montrer que l'application trace est continue, et donner sa norme (?).

Corrigé

1. Montrons que N est une norme. Pour simplifier les écritures, posons, pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i\in[\![1,n]\!]$, $L_i(A)=\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_i n\mathbb{C}$. Alors :
   - **i.** pour tout i, $L_i(A)\geqslant 0$, et donc $N(A)=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}L_i(A)\geqslant 0$;
   - **ii.** si $N(A)=0$, il est clair que tous les $L_i(A)$ sont nuls, puis que, pour chaque i, tous les $|a_{ij}|$ sont nuls : la matrice A est donc la matrice nulle ;
   - **iii.** $L_i(\lambda A)=|\lambda|L_i(A)$ pour tout i, donc, puisque $|\lambda|\in\mathbb{R}_+$, $N(\lambda A)=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda|L_i(A)=|\lambda|N(A)$;
   - **iv.** pour tout i, on a $L_i(A+B)\leqslant\sum_{j=1}^n\big(|a_{ij}|+|b_{ij}|\big)=L_i(A)+L_i(B)\leqslant N(A)+N(B)$; en passant au sup, on obtient bien $N(A+B)\leqslant N(A)+N(B)$.

   L'application N est donc bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On montre de même que N' est une norme ; on peut ausi le déduire du fait que $N'(A)=N({}^tA$ pour toute matrice A.
2. **Première solution** : l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont équivalentes.
Deuxième solution : on peut déterminer deux constantes réelles a et b vérifiant $N'\leqslant aN$ et $N\leqslant bN'$. Pour cela, notons que, avec les notations précédentes, on a, pour tout (i,j), $|a_{ij}|\leqslant L_i(A)\leqslant N(A)$; on en déduit que, pour tout j, $\sum_{i=1}^n|a_{ij}|\leqslant nN(A)$, puis que $N'(A)\leqslant nN(A)$. On peut donc prendre $a=n$.
On montre de même que $b=n$ convient.
On peut remarquer que la valeur $a=n$ est optimale : on a $N'(A)=nN(A)$ si les coefficients de la première colonne de A valent tous 1, les autres étant nuls.

3. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, toutes les applications linéaires ayant $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour espace de départ, sont continues ; c'est donc en particulier le cas pour la trace.

C'est sûrement pour obliger les candidats à chercher un k tel que $|\operatorname{tr} A| \leqslant kN(A)$ pour toute matrice A, que l'examinateur parle de norme (subordonnée) d'une application linéaire, ce qui est tout à fait hors programme.

En deux mots, une fois choisies des normes dans les espaces de départ et d'arrivée (ici, N par exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et le module dans $\mathbb{C}$), on appelle norme subordonnée d'une application linéaire f, le sup des $\|f(x)\|$ quand x décrit la boule unité fermée (ce sup existe car...). On démontre que c'est le plus petit des réels k vérifiant $\quad \forall x \quad \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.

Ici, si A appartient à la boule unité fermée (que nous noterons B), alors, pour tout (i,j), $|a_{ij}| \leqslant N(A) \leqslant 1$, d'où l'on déduit immédiatement que $|\operatorname{tr} A| \leqslant n$; n est donc un majorant de $|\operatorname{tr}|$ sur B.

De plus, on a clairement $I_n \in B$, et $|\operatorname{tr} I_n| = n$. Ce majorant est atteint, c'est donc le sup de $|\operatorname{tr}|$ sur B ; autrement dit la norme cherchée vaut n.

On peut aussi le justifier en montrant de manière analogue que n est le plus petit des réels k vérifiant $\quad \forall A \quad |\operatorname{tr} A| \leqslant kN(A)$.

III. Petites Mines (Bouthillon)

Exo A Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qu'on munit du produit scalaire usuel.

1. Montrer que A^2 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles négatives ou nulles.

2. Soit X un vecteur propre de A^2 associée à une valeur propre de A^2 strictement négative. Montrer que $\operatorname{Vect}(X, AX)$ est de dimension 2 et qu'il est stable par A.

3. Expliquer pourquoi A est semblable à une matrice se décomposant en blocs sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$ (*L'énoncé ne fonctionne pas sous cette forme, j'attends des détails*).

Exo B Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\quad N_1(P) = \sup\{|P(t)|; t \in [-1,1]\} \quad$ et $\quad N_2(P) = \sup\{|P(t)|; t \in [1,2]\}$. Soit f la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ qui, à un polynôme P, associe $P(0)$. Étudier la continuité de f par rapport aux normes N_1 et N_2.

Corrigé

A. 1. On a ${}^t(A^2) = (-A)^2 = A^2$; la matrice A^2 est donc symétrique réelle, donc diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de A^2 et X un vecteur propre associé. Alors, $(X|A^2X) = \lambda(X|X) = \lambda\|X\|^2$; mais aussi

$$(X|A^2X) = {}^tXA^2X = -{}^t(AX)(AX) = -\|AX\|^2$$

et donc $\quad \lambda = -\|AX\|^2/\|X\|^2 \leqslant 0$.

2. Posons $P = \operatorname{Vect}(X, AX)$, et notons λ la valeur propre associée à X.

Les images de X et AX sont respectivement AX et $A^2X = \lambda X$, donc appartiennent à P ; puisque X et AX engendrent P, P est bien stable par A.

Supposons (X, AX) liée. Puisque $X \neq 0$ (vecteur propre), il existe alors $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \mu X$. Le vecteur X est donc vecteur propre de A pour la valeur propre μ, donc $A^2X = \mu^2 X$. Mais alors, $\lambda = \mu^2$, en contradiction avec $\lambda < 0$. La famille (X, AX) est donc libre, et $\dim P = 2$.

3.

B. Pour N_1, on a évidemment $\quad |f(P)| = |P(0)| \leqslant N_1(P) \quad$ pour tout polynôme P, puisque $0 \in [-1,1]$. Avec $k = 1$, on a donc $|f(P)| \leqslant kN_1(P)$ pour tout P, on sait que cela suffit à garantir la continuité de l'application linéaire f. De plus, la valeur $k = 1$ ne peut pas être améliorée, puisqu'on a $|f(P)| = N_1(P)$ pour tout polynôme constant par exemple.

Par contre, f n'est pas continue par rapport à N_2. En effet, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X-2)^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $|P_n(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [1,2]$, et donc $N_2(P_n) \leqslant 1$; mais $|f(P_n)| = 2^n$. Le rapport $|f(P_n)|/N_2(P_n)$ tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc n'est pas majoré. Il n'existe donc pas de réel k vérifiant $|f(P)| \leqslant kN_2(P)$ pour tout P, l'application f n'est pas continue.

Remarque : si l'on ne trouve pas de polynômes P_n particuliers pour lesquels $|f(P_n)|/N_2(P_n)$ n'est pas borné, on peut se rabattre sur Stone-Weierstrass pour prouver leur existence.

IV. ENSEA (Bouthillon)

Exo A Soit (U_n) une suite décroissante qui tend vers 0 en $+\infty$. Soit (V_n) la suite définie pour tout n par : $V_n = n(U_n - U_{n+1})$. Montrez que les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

Exo B Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\right| \leqslant n$.

Corrigé

A. Notons déjà que, puisque (U_n) décroît, on a $V_n \geqslant 0$ pour tout n ; et, puisque de plus U_n tend vers 0, $U_n \geqslant 0$ pour tout n.

D'autre part, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n} kU_k - \sum_{k=0}^{n} kU_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} kU_k - \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)U_j = \sum_{k=1}^{n} U_k - nU_{n+1}$$

Supposons tout d'abord que la série $\sum U_n$ converge. Puisque les U_n sont positifs, les sommes partielles de la série sont majorées par la somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$. La relation précédente donne alors $\sum_{k=0}^{n} V_k \leqslant S$ pour tout n ; les sommes partielles de la série $\sum V_n$ sont donc majorées. Puisqu'elle est à termes positifs, on sait qu'alors elle converge.

Réciproquement, supposons maintenant $\sum V_n$ convergente. Son reste de rang n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} V_k$, est alors défini pour tout n, et a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n \geqslant n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (U_k - U_{k+1}) = nU_{n+1}$$

par télescopage, puisque U_n tend vers 0. Par encadrement, la suite (positive) (nU_{n+1}) a donc pour limite 0.

Puisque $\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + nU_{n+1}$ pour tout n, on en déduit que la série $\sum U_n$ converge (et a même somme que $\sum V_n$).

B. Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. La base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est alors orthonormale. L'endomorphisme f de matrice M dans $\mathcal{B}$ est donc une isométrie vectorielle.

Posons $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Les coefficients de la colonne j de M contiennent les coordonnées de $f(e_j)$, donc $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \big(f(e_j)|u\big)$, puis

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \big(f(e_j)|u\big) = \left(f\Big(\sum_{j=1}^{n} e_j\Big)\Big|u\right) = \big(f(u)|u\big)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne alors $\big|\big(f(u)|u\big)\big| \leqslant \|f(u)\|\,\|u\| = \|u\|^2$ puisque f est une isométrie, d'où finalement $\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\right| \leqslant n$.

V. Telecom Sud Paris (Bouthillon)

Exo A On considère la fonction F qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ avec $f(t) = \exp(-t^2)$ pour tout réel t.

Montrer que F est bien définie. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer cette intégrale.

Exo B Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ; on commencera par calculer $P(A)$ avec P un polynôme quelconque.

Corrigé

A. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est clairement définie et continue sur $[x, +\infty[$. De plus, $f(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ par croissances comparées ; donc f est intégrable sur $[x, +\infty[$, et donc $F(x)$ est bien défini.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a de plus $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = F(0) - \int_0^x f(t)\,dt$. Puisque f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, les résultats sur l'intégrale fonction de sa borne supérieure montrent déjà que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-f$; elle est donc en particulier continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, pour $x \geqslant 1$, on a $t \geqslant 1$ pour tout $t \in [x, +\infty[$, et donc $\quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-x}$; $F(x)$ est donc aussi négligeable devant $1/x^2$ en $+\infty$, donc F est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque $F' = -f$, une intégration par parties donne alors

$$\int_0^{+\infty} F(u)\,du = [uF(u)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ue^{-u^2}\,du$$

L'encadrement $0 \leqslant F(x) \leqslant e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$, montre que $uF(u)$ a pour limite 0 en $+\infty$; le crochet est donc bien défini, ce qui justifie l'intégration par parties, et il vaut 0.
Enfin, la dernière intégrale vaut $[(e^{-u^2})/2]_0^{+\infty} = 1/2$, et donc $\int_0^{+\infty} F(u)\,du = 1/2$.

B. En calculant les premières valeurs de B^k, on constate facilement que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui se justifie rapidement par récurrence.
Si $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$, on a donc $\quad P(B) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n p_k A^k & \sum_{k=0}^n kp_k A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^n p_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
Supposons dans un premier temps B diagonalisable. On sait alors qu'on peut choisir un polynôme P, scindé à racines simples, vérifiant $P(B) = 0$; on a donc $P(A) = AP'(A) = 0$.
Puisque P est scindé à racines simples, P et P' sont premiers entre eux. On peut donc choisir deux polynômes U et V vérifiant $UP + VP' = 1$; en appliquant cette relation à A, on en déduit $U(A)P(A) + V(A)P'(A) = I_n$, soit $\quad V(A)P'(A) = I_n$.
Cette dernière relation prouve que la matrice $P'(A)$ est inversible, d'inverse $V(A)$. La relation $AP'(A) = 0$ montre alors que $A = 0$.
La réciproque étant immédiate, on a donc montré que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.