ELECTROMAGNETISME

Analyse vectorielle

I. Opérateur gradient d'un champ scalaire

Définition :
Soit $f(M)$ un champ scalaire, on appelle gradient de f l'opérateur tel que :

$$\boxed{df(M) = \overrightarrow{grad}f(M).\overrightarrow{dM}}$$

Propriétés :

- Surface d'équation $\mathrm{f(M)} = \mathrm{cte}$: $df(M) = \overrightarrow{grad}f(M).\overrightarrow{dM} = 0$. Les surfaces d'équation $\mathrm{f(M)} = \mathrm{cte}$ sont orthogonale aux lignes de champ de $\overrightarrow{grad}f(M)$
- On dit qu'un vecteur $\vec{a}(M)$ dérive d'un potentiel scalaire $\mathrm{f(M)}$ lorsqu'on peut écrire :

$$\boxed{\vec{a}(M) = -\overrightarrow{grad}f(M)}$$

Expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\overrightarrow{dM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{grad}f(M) = \left(\overrightarrow{grad}f\right)_x\overrightarrow{u_x} + \left(\overrightarrow{grad}f\right)_y\overrightarrow{u_y} + \left(\overrightarrow{grad}f\right)_z\overrightarrow{u_z}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$

Expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$

Expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$\overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

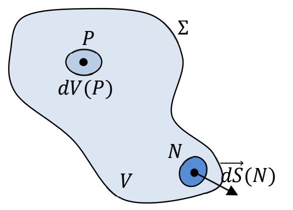
$$\boxed{\overrightarrow{grad}f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}}$$

Electromagnétisme *Analyse vectorielle*

II. L'opérateur divergence d'un champ vectoriel

Théorème d'Ostrogradski :
Soient $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel défini dans tout l'espace, V un volume délimité par une surface fermée Σ orientée par sa normale **sortante**.
La divergence de $\vec{a}$ est définie par :

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{a}(M).\overrightarrow{dS}(M) = \iiint_V div\,\vec{a}(M)\,dV(M)}$$



Expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{div\,\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}}$$

Expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}}$$

Expression de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\boxed{div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}}$$

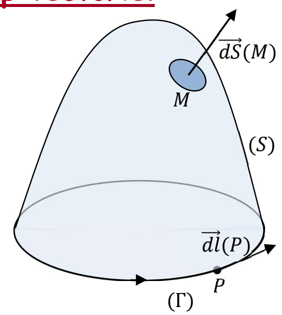
Propriété :

Un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ vérifiant $div\,\vec{a}(M) = 0$ est un champ vectoriel à **flux conservatif**. Le flux à travers toute surface fermée du champ vectoriel est nul.

III. L'opérateur rotationnel d'un champ vectoriel

Théorème de Stokes :
Soient $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel défini dans tout l'espace et une surface Σ orientée par un contour (C) fermé.
Le rotationnel de $\vec{a}$ est défini par :

$$\boxed{\oint_{P\in(\Gamma)} \vec{a}(P).\overrightarrow{dl}(P) = \iint_{M\in(S)} \overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M).\overrightarrow{dS}(M)}$$



Expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{vmatrix}}$$

Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\begin{vmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\end{vmatrix}$$

Expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\begin{vmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\end{vmatrix}$$

Propriété :

Un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ vérifiant $\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M)=\vec{0}$ est un champ vectoriel à **circulation conservatif**. La circulation sur tout contour fermé orienté du champ vectoriel est nulle. La circulation sur une courbe ouverte ne dépend pas du chemin suivi.

IV. L'opérateur laplacien

Il peut s'appliquer à un champ scalaire ou vectoriel.

Expression du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes :

Il transforme un champ scalaire en champ scalaire.

$$\Delta f(M)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Expression du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(M)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Expression du laplacien scalaire en coordonnées sphériques :

$$\Delta f(M)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Expression du laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes :

Il transforme un champ vectoriel en champ vectoriel.

$$\Delta\,\vec{a}(M)\begin{vmatrix}\Delta a_x=\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\\ \Delta a_y=\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\\ \Delta a_z=\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\end{vmatrix}$$

V. Composition d'opérateurs

On retient les quatre relations suivantes :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f(M)\right)=\vec{0}$$
$$div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right)=0$$
$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right)=\overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{a})-\Delta\,\vec{a}$$
$$div\left(\overrightarrow{grad}f\right)=\Delta f$$

VI. L'opérateur nabla $\vec{\nabla}$

L'opérateur nabla est un opérateur vectoriel défini uniquement en coordonnées cartésiennes qui permet d'écrire tous les opérateurs dans ce même système de coordonnées.

$$\vec{\nabla}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}$$

On peut ainsi écrire **en coordonnées cartésiennes uniquement** :

$$\overrightarrow{grad}f=\vec{\nabla}f$$
$$div\,\vec{a}=\vec{\nabla}.\vec{a}$$
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a}=\vec{\nabla}\wedge\vec{a}$$
$$\Delta f=\vec{\nabla}^2 f$$
$$\Delta\,\vec{a}=\vec{\nabla}^2\,\vec{a}$$