# Chapitre 1 : Électrostatique

## I. Distribution de charges

### 1. Notion de charge électrique

Pour interpréter les expériences d'électrisation de la matière par frottement au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, on attribue à la matière un paramètre $q$ appelé **charge électrique**.

L'unité de charge est le Coulomb (C).

La matière est constituée d'atomes avec :
- un noyau composé de nucléons : $Z$ protons de charge $+e$ et $A - Z$ neutrons de charge nulle ;
- un nuage électronique composé d'électrons : $Z$ électrons de charge $-e$.

$e$ est appelée **charge élémentaire** : $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C.

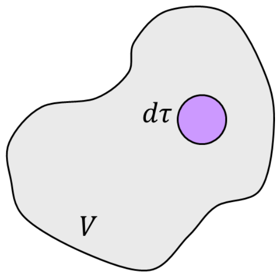
**Propriétés de la charge**
- La charge électrique est quantifiée : la charge observée est toujours un multiple entier de la charge élémentaire.
- La charge totale d'un système isolé reste constante au cours du temps.
- La charge électrique est invariante dans tout changement de référentiel : elle est indépendante du référentiel d'observation.
- La charge électrique est continue à l'échelle macroscopique.

### 2. Densité volumique de charge

**Définition :**

La charge contenue dans un volume élémentaire $d\tau$ (échelle mésoscopique) est :

$\rho$ est la densité volumique de charge. Elle est mesurée en $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$.




La charge totale contenue dans un volume $V$ s'écrit :

### 3. Densité surfacique de charge

On considère une nappe chargée d'épaisseur $h$ très faible devant ses autres dimensions.

La charge portée par le volume $d\tau = h\,dS$ est :

$$dq = \rho\,d\tau = \rho h\,dS$$

On fait tendre $h$ vers zéro en maintenant la charge constante. On pose $\sigma = \rho h$. On définit ainsi une distribution surfacique de charges, de densité $\sigma$.

**Définition :**

La charge portée par une surface élémentaire $dS$ est :

$\sigma$ est la densité surfacique de charge. Elle est mesurée en $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

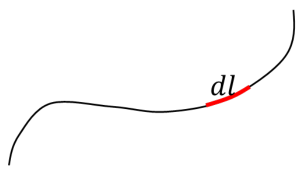

La charge totale contenue sur la surface $S$ s'écrit :

## 4. Densité linéique de charge

**Définition :**

La charge portée par une longueur élémentaire $dl$ est :

$\lambda$ est la densité linéique de charge. Elle est mesurée en $\sigma$ est la densité surfacique de charge. Elle est mesurée en $\mathrm{C \cdot m^{-1}}$.



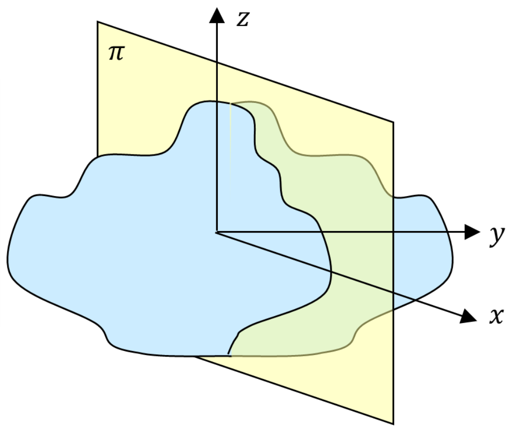

La charge totale de la distribution $D$ s'écrit :

## 5. Symétries des distributions de charges

### a. Symétrie plane

**Symétrie plane**

Une distribution est symétrique par rapport à un plan $\pi$ si, $M$ et $M'$ étant deux points symétriques par rapport à $\pi$, sa densité de charge vérifie :




### b. Antisymétrie plane

**Antisymétrie plane**

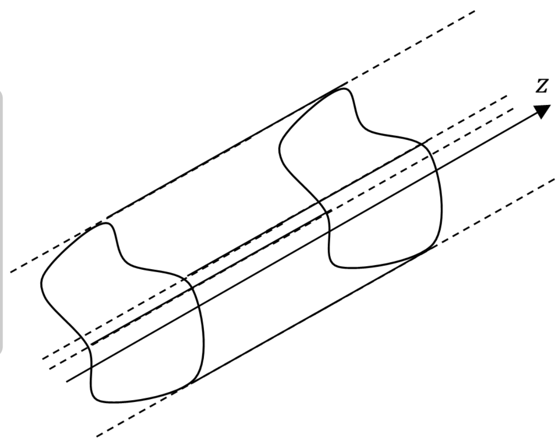
Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan $\pi^+$ si, $M$ et $M'$ étant deux points symétriques par rapport à $\pi^+$, sa densité de charge vérifie :

Si le plan $\pi^+$ est le plan $(Oxz)$ alors : $\rho(x, y, z) = -\rho(x, -y, z)$

## 6. Invariance par translation

**Invariance par translation**

Une distribution est invariante par translation suivant $(Oz)$ si, pour tout point $M$ et son translaté $M'$, sa densité de charge vérifie :

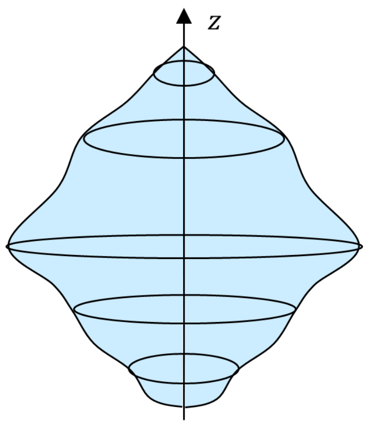



**Remarques :**
La distribution est obligatoirement illimitée dans la direction $(Oz)$.
Tout plan perpendiculaire à $(Oz)$ est plan de symétrie.

### a. Invariance par rotation

**Invariance par rotation**

Une distribution est invariante par rotation autour d'un axe $(Oz)$ si la densité de charge en un point $M$ et en tout point obtenu par rotation d'un angle quelconque de $M$ autour de $(Oz)$ est la même.
La densité de charge d'une distribution invariante par rotation autour d'un axe $(Oz)$ est telle que :

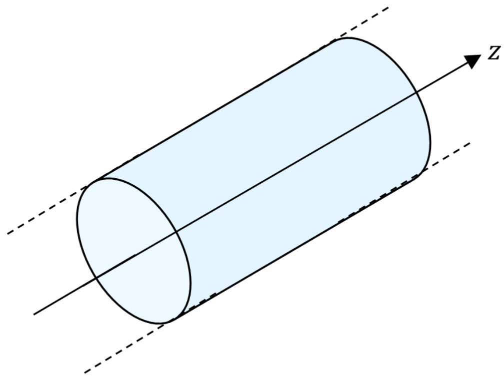



**Remarque :**
Tout plan contenant l'axe $(Oz)$ est plan de symétrie.

### b. Symétrie cylindrique

**Symétrie cylindrique**

La distribution est invariante par translation parallèlement à $(Oz)$ et par rotation autour de $(Oz)$.

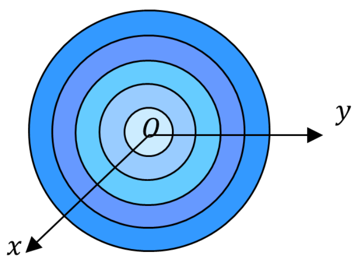



**Remarque :**
Tout plan perpendiculaire à l'axe $(Oz)$ est plan de symétrie.

### c. Symétrie sphérique

**Symétrie sphérique**

La distribution est invariante par toute rotation autour de tout axe passant par le centre de symétrie $O$.




**Remarque :**
Tout plan contenant $O$ est plan de symétrie.

# II. Champ électrostatique

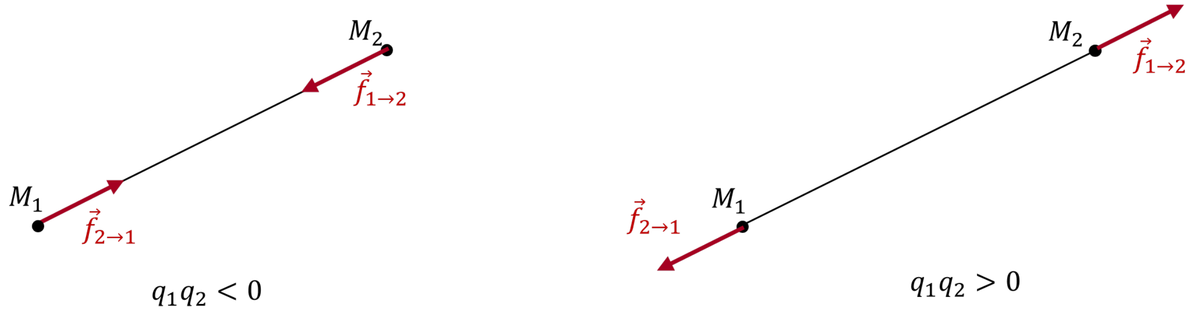
## 1. Loi de Coulomb

**Loi de Coulomb :**

En 1780, Coulomb énonce la loi d'interaction entre deux charges ponctuelles $q_1$ et $q_2$.

Deux charges ponctuelles $q_1$ et $q_2$, immobiles en $M_1$ et $M_2$, exercent l'une sur l'autre une force :

avec la permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ SI ou $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ SI.




## 2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Le champ créé par $q_1$ caractérise la perturbation des propriétés de l'espace due à la présence de cette charge.
L'unité du champ électrostatique est le $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

**Définition :**

Considérons une charge $q$ immobile au point $O$, le champ électrostatique qu'elle crée a pour expression :

## 3. Principe de superposition

Soit une distribution discrète de charge : $\{q_1, \dots, q_N\}$ situées au point $\{A_1, \dots, A_N\}$.
La résultante des forces exercées sur une charge $q$ située en $M$ est la somme vectorielle des $N$ forces exercées par chaque charge supposée seule.

C'est le principe de superposition, il signifie que la présence d'une charge n'a pas d'influence sur l'autre.

## 4. Champ créé par une distribution discrète de charges

Champ créé par la même distribution que précédemment :

On peut donc appliquer le principe de superposition au champ électrostatique.

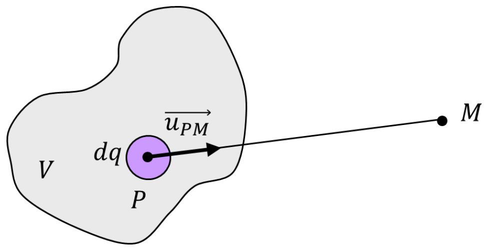
## 5. Champ créé par une distribution volumique de charge

On décompose le système en éléments de volumes assimilables à des charges ponctuelles :

Champ créé par la charge $dq$ :

Le champ résultant est la somme vectorielle de tous ces champs élémentaires :

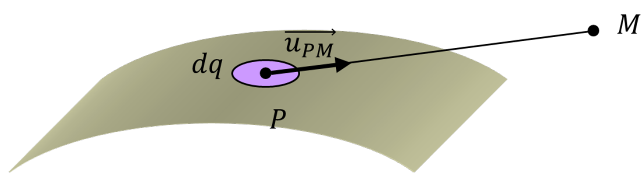
$$\vec{E}(M) = \iiint_P \overrightarrow{dE}_P(M)$$




**Champ créé par une distribution volumique de charges :**

## 6. Champ créé par une distribution surfacique de charge

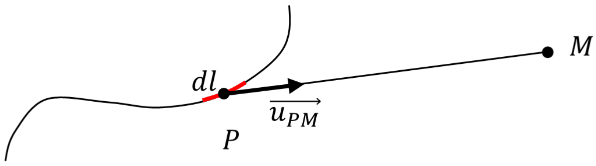
On procède de même qu'au paragraphe précédent avec $dq = \sigma\, dS$.




**Champ créé par une distribution surfacique de charges :**

## 7. Champ créé par une distribution linéique de charges

On procède de même qu'au paragraphe précédent avec $dq = \lambda\, dl$.




**Champ créé par une distribution linéique de charges :**

# III. Propriétés de symétrie du champ

## 1. Principe de Curie

**Principe de Curie :**

Les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les conséquences.

Ce principe signifie qu'un champ électrostatique possède les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution de charge qui le crée.

## 2. Invariance par translation

Le champ électrostatique créé par une distribution invariante par la translation $t_{\vec{a}}$ vérifie :

En $M' = t_{\vec{a}}(M)$, on voit exactement la même distribution qu'en $M$. Si la distribution est invariante par toute translation d'axe $(Oz)$, alors $\overrightarrow{E}(M)$ ne dépend pas de $z$.

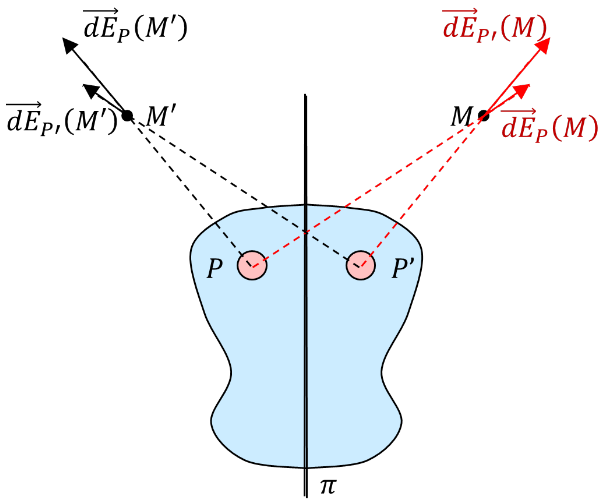
## 3. Invariance par rotation

Le champ électrostatique créé par une distribution invariante par la rotation $R_{\Delta,\theta}$ vérifie :

Si la distribution est invariante par toute rotation d'axe $(Oz)$, en coordonnées cylindriques, alors $\overrightarrow{E}(M)$ ne dépend pas de $\theta$.

## 4. Symétrie plane

On considère une distribution volumique de charges, de densité $\rho$, admettant un plan $\pi$ de symétrie.

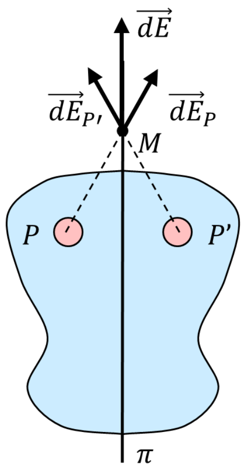



Ceci peut être fait pour tous les couples de points $P$ et $P'$ de la distribution.

**Conclusion :**

Le champ électrostatique créé par une distribution admettant un plan $\pi$ de symétrie vérifie :

Le plan $\pi$ est un plan de symétrie pour le champ électrostatique.




Cette seconde propriété est un cas particulier du cas général précédent. Les deux éléments de volumes centrés sur $P$ et $P'$ créent en $M$ des champs électrostatiques symétriques par rapport à $\pi$ :

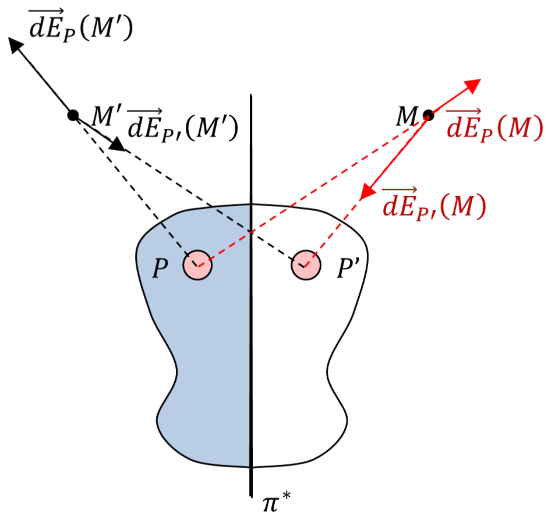
Donc, le champ $\overrightarrow{dE}(M)$ créé au point $M$ appartient nécessairement au plan $\pi$.

**Conclusion :**

Le champ électrostatique créé en un point du plan de symétrie $\pi$ de la distribution appartient à ce plan.

## 5. Antisymétrie plane

On considère une distribution volumique de charges, de densité $\rho$, admettant un plan $\pi^*$ d'antisymétrie.



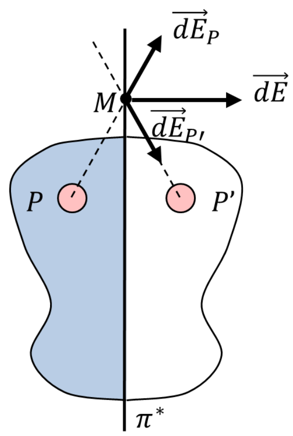

Ceci peut être fait pour tous les couples de points $P$ et $P'$ de la distribution.

**Conclusion :**

Le champ électrostatique créé par une distribution admettant un plan $\pi^*$ d'antisymétrie vérifie :

Le plan $\pi^*$ est un plan d'antisymétrie pour le champ électrostatique.

Cette seconde propriété est un cas particulier du cas général précédent. Les deux éléments de volumes centrés sur $P$ et $P'$ créent en $M$ des champs électrostatiques antisymétriques par rapport à $\pi^*$ :




Donc, le champ $\overrightarrow{dE}(M)$ créé au point $M$ est nécessairement perpendiculaire au plan $\pi^*$.

**Conclusion :**

Le champ électrostatique créé en un point du plan d'antisymétrie $\pi^*$ de la distribution est perpendiculaire à ce plan.

# IV. Circulation du champ électrostatique : potentiel électrostatique

## 1. Définition

**Définitions :**

- La circulation élémentaire du champ de vecteur $\vec{E}$ sur le déplacement élémentaire :

- La circulation du champ de vecteur $\vec{E}$ de $A$ à $B$ le long de $\Gamma$ est :

  où $\overrightarrow{dl}$ désigne le déplacement élémentaire le long de la courbe $\Gamma$.

## 2. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Champ créé par une charge ponctuelle $q$ placée en $O$, origine du repère.

Circulation élémentaire :

On pose $r = OM$.

Circulation du champ $\vec{E}_O$ de $A$ à $B$ sur la courbe $\Gamma$ :

avec $r_A = OA\,;\, r_B = OB$.

**Remarque :**
La circulation ne dépend pas du choix de la courbe $\Gamma$ allant de $A$ à $B$. La circulation du champ créé par une charge ponctuelle est conservative. On ne précisera plus la courbe $\Gamma$ allant de $A$ à $B$.

**Définition :**

On définit le potentiel électrostatique créé en $M$ par la charge ponctuelle placée en $O$ par :

Le potentiel est connu à une constante près. On choisit souvent de prendre le potentiel nul à l'infini.

**Retour à la circulation du champ :**

**Cas d'une courbe fermée**

## 3. Potentiel créé par une distribution de charges

— **Distribution discontinue :**
Soit une distribution discrète de charge : $\{q_1, \ldots, q_N\}$

**Conclusion :**

Le théorème de superposition est vérifié par le potentiel.

On généralise ce résultat à toute distribution de charges.

— **Distribution continue :**
On découpe la distribution de charges en charges élémentaires $dq$ et on procède comme précédemment.

→ Distribution volumique :

→ Distribution surfacique :

→ Distribution linéique :

## 4. Relation entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique

**Définition :**

Soit $f(M)$ un champ scalaire, on appelle gradient de $f$ l'opérateur tel que :

$$\boxed{df(M) = \overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot \overrightarrow{dOM}} \quad (1)$$

**Expression du gradient en coordonnées cartésiennes :**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\overrightarrow{dM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = (\overrightarrow{\text{grad}} f)_x\vec{u}_x + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_y\vec{u}_y + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_z\vec{u}_z$$

On obtient donc :

**Propriétés :**

Surface d'équation $f(M) = \text{cte}$ : $df(M) = \overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot \overrightarrow{dM} = 0$. Les surfaces d'équation $f(M) = \text{cte}$ sont orthogonales aux lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.

**Relation entre $\vec{E}$ et $V$ :**

**Propriétés :**

- Le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.
- Le champ $\vec{E}$ est normal à la surface équipotentielle définie par $V = \text{cte}$.

## 5. Propriétés de symétrie du potentiel

Les propriétés de symétrie du potentiel se déduisent de celles du champ électrostatique créé par la distribution.

### a. Invariance par translation

Soit une distribution invariante par translation parallèlement à $(Oz)$, le potentiel ne dépend que des variables $x$ et $y$ comme le champ électrostatique.

### b. Invariance par rotation

Soit une distribution invariante par rotation autour de l'axe $(Oz)$, le champ électrostatique ne dépend que des variables $r$ et $z$ en coordonnées cylindriques. Il en est de même pour le potentiel.

### c. Symétrie plane

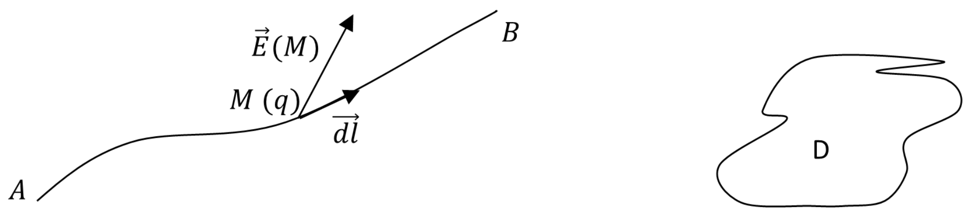
Le potentiel électrostatique créé par une distribution admettant un plan $\pi$ de symétrie vérifie :

### d. Antisymétrie plane

Le potentiel électrostatique créé par une distribution admettant un plan d'antisymétrie $\pi^*$ vérifie :

## 6. Énergie potentielle électrostatique

On considère une charge ponctuelle $q$ située en $M$ et une distribution $\mathcal{D}$ de charges extérieures. $\mathcal{D}$ crée en $M$ un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et un potentiel $V(M)$.




Le travail de la force électrostatique ne dépend pas du chemin suivi, la force électrostatique est donc conservative. On peut donc lui associer une énergie potentielle définie à une constante près.

**Définition :**

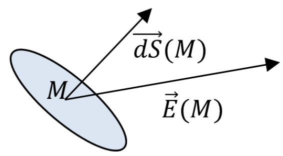
L'énergie potentielle d'une charge ponctuelle $q$ placée dans un champ électrostatique extérieur s'écrit :

# V. Flux du champ électrostatique

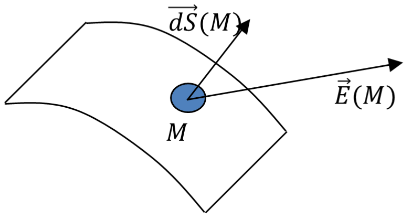
## 1. Définition

**Définitions :**

— Le flux élémentaire d'un champ $\vec{E}$ à travers une surface $\overrightarrow{dS}$ s'écrit :




— Le flux à travers une surface $S$ s'écrit :




**Orientation des surfaces :**
Les surfaces intervenant dans les flux sont orientées. L'orientation est à choisir avant de faire le calcul.

— Surface fermée : Par convention, le vecteur $\overrightarrow{dS}(M)$ est orienté vers l'extérieur.
— Surface ouverte : L'orientation est à choisir. Cependant, si la surface s'appuie sur un contour fermé, il faut orienter $\overrightarrow{dS}(M)$ positivement par rapport au contour (règle de la main droite).

## 2. Théorème de Gauss

**Théorème de Gauss : (admis)**

Soit une surface fermée $(S)$ orientée vers l'extérieur.

où $Q_{\text{int}}$ représente les charges de la distribution de charge contenues à l'intérieur de la surface fermée $(S)$.