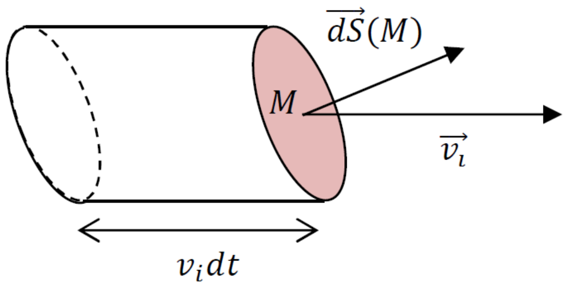
Chapitre 3 : Magnétostatique

I. Courant électrique

1. Vecteur densité de courant électrique

On considère un élément de surface $\overrightarrow{dS}(M)$ centré sur M.

Contribution des porteurs de charges de type i :
Charge dq_i traversant la surface $\overrightarrow{dS}(M)$ entre t et $t+dt$: Les porteurs de type i concernés se trouvent, à l'instant t, dans le cylindre de base $\overrightarrow{dS}(M)$, de génératrice $\vec{v}_i$ et de longueur $v_i dt$.



Contribution de tous les porteurs de charges :
Charge dq traversant la surface $\overrightarrow{dS}(M)$ entre t et $t+dt$:

Vecteur densité de courant électrique :

Le vecteur densité de courant électrique $\vec{\jmath}(M,t)$ est le vecteur dont le flux à travers la surface $\overrightarrow{dS}(M)$ est égal à la charge électrique traversant $\overrightarrow{dS}(M)$ par unité de temps.

2. Intensité du courant

Le vecteur densité de courant nous permet d'avoir une description à l'échelle mésoscopique du courant électrique. Il reste à définir une description à l'échelle macroscopique.

On considère une surface S orientée qu'on découpe en éléments de surface $\overrightarrow{dS}$.

La charge traversant la surface S entre t et $t+dt$ s'écrit :

Définition :

On appelle intensité du courant le débit de charge traversant S :

L'intensité du courant est donc égale au flux du vecteur densité de courant $\vec{\jmath}$ à travers la surface S orientée.

Remarque :
Lorsqu'on calcule l'intensité du courant traversant un fil conducteur, elle est calculée avec une surface orientée dans le sens positif du courant le long du fil.

Ordres de grandeur :
Fil de cuivre :

- Section $S = 1$ mm^2
- Intensité $I = 10$ A

Le vecteur densité de courant est uniforme sur toute la section du fil :

Dans un fil en cuivre, les porteurs de charges sont des électrons :

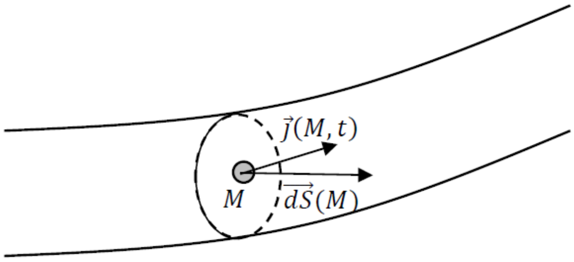
- Charge $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C
- Un électron libre par atome de cuivre
- Masse volumique : $\mu = 8.96 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}
- Masse molaire : $M = 63.5$ g $\cdot$ mol^{-1}
- Densité d'électrons libres : $n = \frac{\mu N_A}{M} = 8.49 \cdot 10^{28}$ m^{-3}

La norme du vecteur densité de courant s'écrit :

3. Distribution filiforme

Nous utiliserons souvent des conducteurs en forme de fil. La section S du conducteur filiforme est constante et les deux dimensions de cette section sont très faibles devant la troisième dimension (longueur du fil).

La densité linéique de courant correspond au courant lui-même. On a orienté la section du fil dans le sens positif par rapport au courant. On retrouve la distribution volumique en zoomant sur le fil.



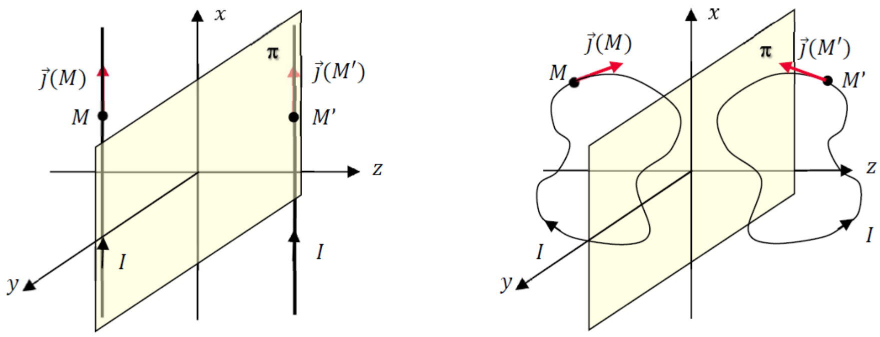
II. Propriétés de symétrie et d'invariance

1. Symétries et invariances des distributions de courant

a. Symétrie plane

Symétrie plane

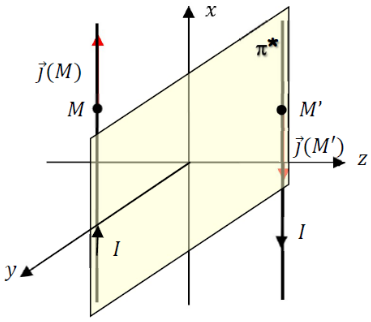
Une distribution de courant est symétrique par rapport à un plan π si, M et M' étant deux points symétriques par rapport à π, son vecteur densité de courant vérifie :

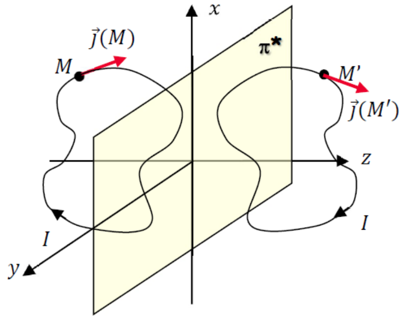


b. Antisymétrie plane

Antisymétrie plane

Une distribution de courant est antisymétrique par rapport à un plan π^* si, M et M' étant deux points symétriques par rapport à π^*, son vecteur densité de courant vérifie :





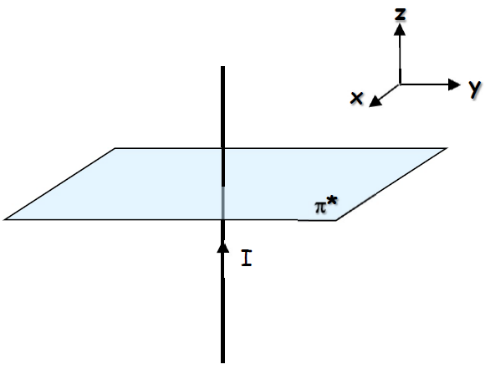
c. Invariance par translation

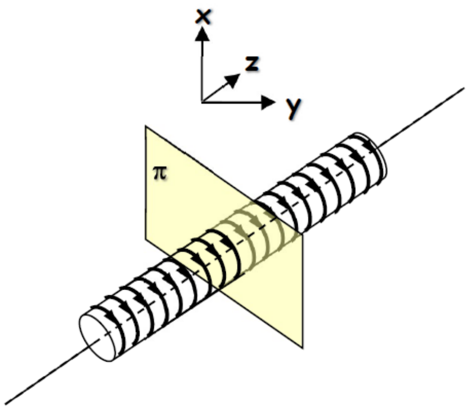
Invariance par translation

Une distribution est invariante par translation suivant (Oz) si, pour tout point M et son translaté M', son vecteur densité de courant vérifie :

Remarque : La distribution est obligatoirement illimitée dans la direction (Oz).

Exemples :



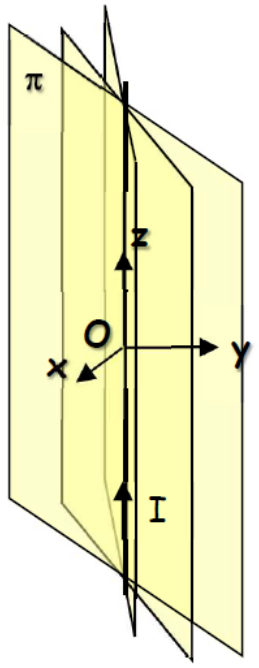


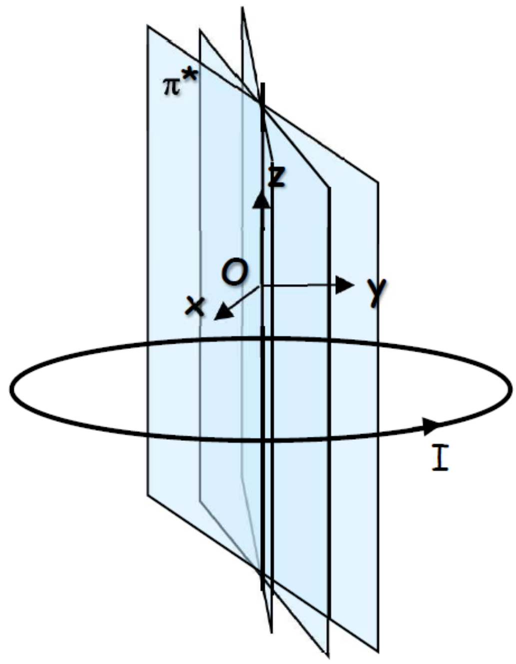
d. Invariance par rotation

Invariance par rotation

Une distribution est invariante par rotation autour d'un axe (Oz) si son vecteur densité de courant $\vec{j}(M')$ en un point M' obtenu par rotation d'un angle quelconque de M autour de (Oz) est le vecteur obtenu par rotation de $\vec{j}(M)$ autour de Oz d'un même angle.

Exemples :





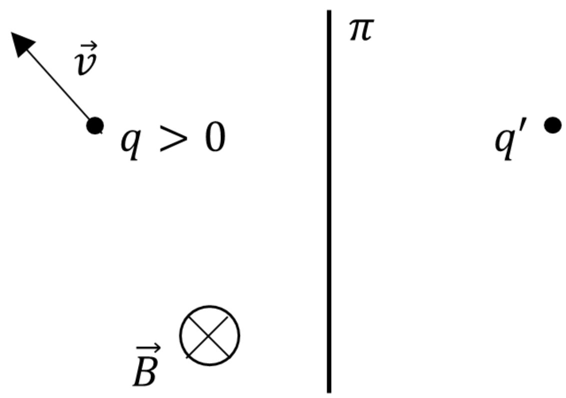
2. Symétries et invariances du champ magnétostatique

a. Action d'une symétrie plane sur le champ magnétostatique

Pour trouver l'action d'une symétrie plane sur le champ magnétique, on utilise la force de Lorentz. On considère une charge $q > 0$ placée en M et animée d'une vitesse $\vec{v}$. Elle se trouve dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$. Elle subit une force :

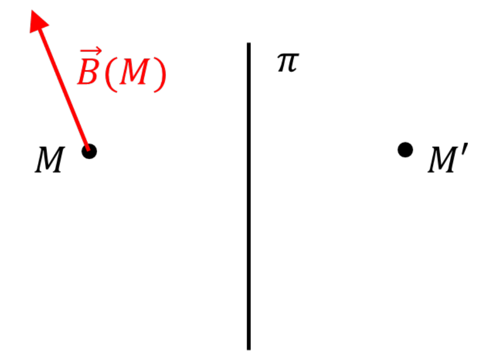
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On réalise la symétrie par rapport au plan π. On obtient une charge $q' = q$ en M' tel que $M' = \text{sym}_\pi(M)$. Elle est animée d'une vitesse $\vec{v}'$ telle que $\vec{v}' = \text{sym}_\pi(\vec{v})$. Elle subit une force $\vec{F}'$ telle que $\vec{F}' = \text{sym}_\pi(\vec{F})$.
Or on a $\vec{F}' = q\vec{v}' \wedge \vec{B}'$. Par conséquent, le champ $\vec{B}'$ vérifie :



b. Champ créé par une distribution symétrique par rapport à un plan

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de courants admettant un plan de symétrie π. On considère deux points M et M' tels que $M' = \mathrm{sym}_\pi(M)$. On a :



Conclusion :

Le champ magnétostatique créé par une distribution $\mathcal{D}$ admettant un plan π de symétrie vérifie :

Le plan π est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique.

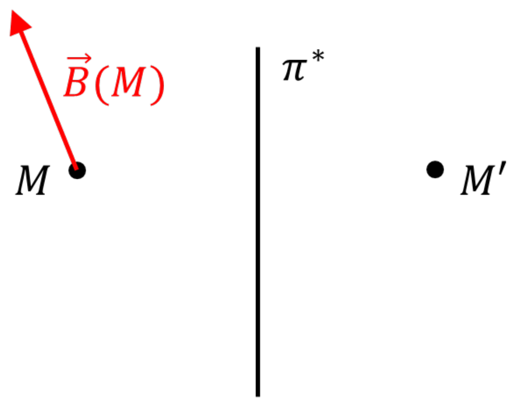
Cette seconde propriété est un cas particulier du cas général précédent. Soit M un point du plan π. M est son propre symétrique par rapport au plan π. Par conséquent, le champ magnétostatique en M est son propre antisymétrique. La seule possibilité est que $\vec{B}(M)$ soit orthogonal à π.

Conclusion :

Le champ magnétostatique créé en un point du plan de symétrie π de la distribution est orthogonal à ce plan.

c. Champ créé par une distribution antisymétrique par rapport à un plan

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de courants admettant un plan d'antisymétrie π^*. On considère deux points M et M' tels que $M' = \mathrm{sym}_{\pi^*}(M)$. On a :



Conclusion :

Le champ magnétostatique créé par une distribution $\mathcal{D}$ admettant un plan d'antisymétrie π^* vérifie :

Le plan π^* est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique.

Cette seconde propriété est un cas particulier du cas général précédent. Soit M un point du plan π^*. M est son propre symétrique par rapport au plan π^*. Par conséquent, le champ magnétostatique en M est son propre symétrique. La seule possibilité est que $\vec{B}(M)$ soit contenu dans π^*.

Conclusion :

Le champ magnétostatique créé en un point du plan d'antisymétrie π^* de la distribution appartient à ce plan.

d. Invariances du champ magnétostatique

Invariance par translation d'axe (Oz) :

Si la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) alors le champ magnétostatique créé par cette dernière ne dépend pas de z.

Invariance par rotation autour de l'axe (Oz) :

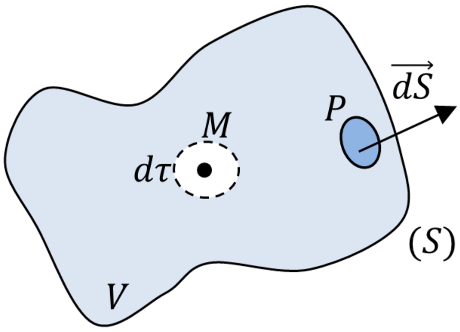
Si la distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) alors le champ magnétostatique exprimé en coordonnées cylindriques et créé par cette dernière ne dépend pas de θ.

III. Propriétés du champ magnétostatique

1. Conservation du flux du champ magnétostatique

Soit une surface S fermée orientée vers l'extérieur. Elle délimite un volume V.

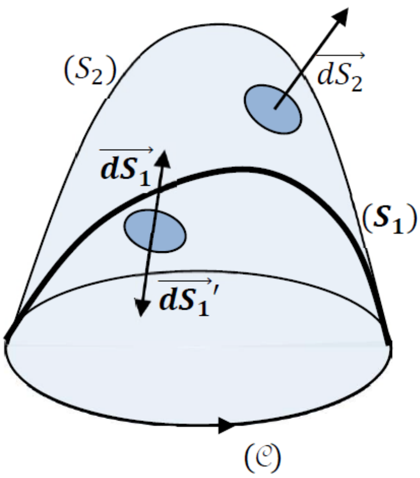
Flux du champ magnétostatique à travers S :



Propriété (admise) :

Le champ magnétostatique est à flux conservatif, c'est-à-dire que le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul :

Soit $(\mathcal{C})$ un contour fermé et orienté. (S_1) et (S_2) sont deux surfaces s'appuyant sur ce même contour. La surface $(S_1) \cup (S_2)$ est une surface fermée. On a donc :



Conclusion :

Le flux du champ magnétostatique est le même à travers toute surface s'appuyant sur un contour $(\mathcal{C})$.

2. Circulation du champ magnétostatique : Théorème d'Ampère

Soit un contour $(\mathcal{C})$ fermé et orienté et (S) une surface s'appuyant sur ce contour. La circulation du champ magnétique le long de $(\mathcal{C})$ s'écrit :

L'intensité traversant la surface (S) s'écrit :

Cette intensité est appelée intensité enlacée par le contour $(\mathcal{C})$.

Théorème d'Ampère :

Soit $(\mathcal{C})$ un contour fermé et orienté.

avec $I_{\text{enlacé}}$ le courant enlacé par le contour $(\mathcal{C})$. Il est compté positivement s'il est orienté positivement par rapport au contour et négativement sinon.

IV. Topographie

1. Lignes de champ

Définition :

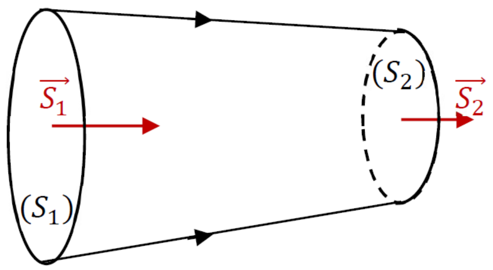
Les lignes de champ du champ magnétostatique sont les lignes continuellement tangentes au champ. Elles sont orientées dans le sens du champ.

Forme des lignes de champ :

Les lignes de champ sont fermées et entourent les sources.

2. Évolution de $\|\vec{B}\|$ dans un tube de champ

Soit Σ une surface fermée constituée d'une portion de tube de champ délimitée par deux sections S_1 et S_2 :



Conclusion :

Le flux de $\vec{B}$ est le même à travers toute section d'un tube de champ.

Conséquence :

Le long d'un tube de champ, la norme du champ magnétostatique est d'autant plus grande que le tube est étroit.