

TD D'OPTION INFORMATIQUE 1

Dédution naturelle

Rappel des règles de la déduction naturelle

Règles structurelles

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} (\text{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} (\text{Aff})$$

Règles d'introduction

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} (\top_i) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_i)$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\perp_e)$$

Règles de la logique classique

$$\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\text{Abs}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg \varphi} (\text{TE}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi}{\Gamma \vdash \varphi} (\neg \neg_e)$$

1 Premières preuves

Dériver une démonstration des séquents suivants :

1. $p, p \rightarrow q \vdash q$
2. $p \vee q \vdash q \vee p$
3. $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
4. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
5. $\neg p \rightarrow p \vdash p$ (utiliser une règle de la logique classique)
6. $\vdash \neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (utiliser une règle de la logique classique)

2 Correction de la déduction naturelle

1. Rappeler l'énoncé du théorème de correction de la déduction naturelle.
2. Détailler dans la preuve de ce théorème la rédaction du cas de l'induction structurale où la racine de l'arbre de preuve correspond à la règle $(\vee_e)$.

3 Lois de Morgan

1. Dériver le séquent $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$.
2. Dériver le séquent $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.
3. Dériver le séquent $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$.
4. Dériver le séquent $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ (utiliser la logique classique).

4 Équivalence des règles de la logique classique

1. Montrer que la règle (Abs) peut être retrouvée à partir de la règle (TE) et des règles non classiques.
2. Même question pour (Abs) à partir de $(\neg\neg e)$.
3. Même question pour $(\neg\neg e)$ à partir de (Abs).
4. Même question pour $(\neg\neg e)$ à partir de (TE).
5. (un peu balèze) Même question pour (TE) à partir de (Abs).
6. (facile si la précédente est faite) Même question pour (TE) à partir de $(\neg\neg e)$.

5 Formules usuelles (mais pas forcément classiques)

Démontrer les formules suivantes dans la déduction naturelle (en utilisant les règles de la logique classique si nécessaire) :

1. $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (Curryfication)
2. $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ (Contraposée intuitionniste)
3. $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (Contraposée classique)
4. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ (Simplification de la triple négation)
5. $((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$
 $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$ (Distributivité de $\rightarrow$)
6. $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$
 $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$)
 $(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
 $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$ (Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$)
7. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Loi de Peirce)

6 Règles de $\leftrightarrow$

En partant de l'équivalence sémantique $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, déterminer des règles d'introduction et d'élimination pour le connecteur $\leftrightarrow$ ne faisant apparaître aucun autre connecteur.