Centrale 2017 - Option informatique
Un corrigé

1 Considérations générales

1. Pour une machine a un seul état q_0, tout mot lu depuis l'unique état mène en q_0. Tout mot est synchronisant.
2. Ici l'alphabet est $\Sigma = \{a\}$. Une récurrence simple montre qu'un mot de longueur paire mène de i en i alors qu'un mot de longueur impaire mène de i en $3 - i$. Aucun mot ne mène donc simultanément de 1 et 2 dans le même état. Il n'existe donc pas de mot synchronisant.
3. Le mot acb est synchronisant pour M_2.
4. ```
   let rec delta_etoile m e u  =
      match u with
         |[] -> e
         |x::q ->  delta_etoile m (m.delta m e x) q;;
   ```
5. On regarde l'état `q0` obtenu par lecture du mot à partir de l'état 0. On teste alors successivement si on atteint le même état à partir de $1, 2, \ldots, p-1$. On peut s'arrêter dès que l'on tombe sur autre chose que `q0` et c'est pourquoi je choisis une boucle conditionnelle.

   ```
   let est_synchronisant m u =
    let q0=delta_etoile m 0 u
    in let i=ref 1
    in while !i<m.n_etats && (delta_etoile m !i u)=q0 do incr i done;
    !i=m.n_etats;;
   ```
6. Supposons qu'on dispose d'un mot synchronisant u. La machine possède au moins deux états q_0 et q_1 et par définition, on a $q_0.u = q_1.u$.
   Comme $q_0.\varepsilon \neq q_1.\varepsilon$, il existe un préfixe v de u tel que $q_0.v \neq q_1.v$. Comme l'ensemble des préfixes de u est fini, il va exister un plus long préfixe v tel que $q_0.v \neq q_1.v$.
   Comme $q_0.u = q_1.u$, $v \neq u$ et il existe une lettre x telle que vx soit préfixe de u. Par choix de v, on a $(q_0.v).x = q_0.(vx) = q_1.(vx) = (q_1.v).x$. Les états $q = q_0.v$ et $q' = q_1.v$ et la lettre x conviennent donc.
7. On note que par induction immédiate on a :

$$\forall P \subset Q,\ \widehat{\delta}^*(P, m) = \{\delta^*(p, m),\ p \in P\}$$

   (a) Supposons qu'il existe un mot u synchronisant pour M et notons q_0 l'état de M où mène la lecture de u. Soit $P = Q$ (considéré comme partie de Q et donc état de $\widehat{M}$). On a alors

$$\widehat{\delta}^*(P, u) = \{\delta^*(p, u),\ p \in P\} = \{q_0\}$$

   Réciproquement, supposons qu'il existe un mot u tel que $\widehat{\delta}^*(Q, u)$ soit un singleton $\{q_0\}$. Alors u est synchronisant pour M.
   Il existe donc un mot synchronisant pour M si et seulement si il existe dans $\widehat{M}$ un singleton accessible depuis l'état Q.

   (b) Considérons l'automate obtenu depuis la machine $\widehat{M}$ en prenant Q comme état initial et les singletons comme états terminaux. Les mots reconnus par cet automate sont exactement les éléments de $LS(M)$.

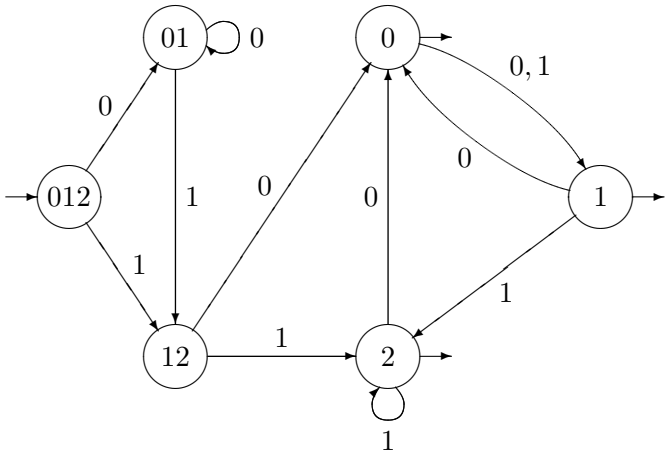
   (c) On commence par donner la table de M_0 puis on en déduit celle de $\widehat{M_0}$. On procède comme pour l'algorithme de déterminisation en partant de ce qui sera l'état initial c'est à dire
   ```

$\{0,1,2\}$.

M_0	0	1	2
0	1	0	0
1	1	2	2

$\widehat{M_0}$	$0,1,2$	$0,1$	$1,2$	0	2	1	$0,2$	$\emptyset$
0	$0,1$	$0,1$	0	1	0	0	$0,1$	$\emptyset$
1	$1,2$	$1,2$	2	1	2	2	$1,2$	$\emptyset$

Au delà de la double barre, les états sont non accessibles depuis l'état initial de l'automate reconnaissant $LS(M_0)$ qui est dessiné ci-dessous.



Dès que l'on arrive sur un état singleton, on reste sur ces états. On arrive pour la première fois sur un singleton quand on lit le premier 1 puis un 0 ou un 1. Ainsi

$$LS(M_0) = 0^*1(0+1)(0+1)^*$$

8. Soit M une machine et q_0 un état de M. Notons M' la machine obtenue à partir de M en redirigeant toutes les transitions issues de q_0 vers lui même.
   - Supposons que M' possède un mot synchronisant u. Comme $q_0.u = q_0$, la lecture de u dans M' depuis tout état mène à q_0. On en déduit que la lecture de u depuis tout état dans M passe par q_0.
   - Réciproquement, s'il existe u tel que la lecture de u depuis tout état dans M passe par q_0 alors u est synchronisant pour M' (la lecture de u dans M' depuis tout état mène en q_0).

2 Algorithmes classiques

1. (a)
```
let ajoute f x =
      if f.vide then begin
            f.vide <- false ;
            f.fin <- (1+f.deb) mod (Array.length f.tab);
            f.tab.(f.deb) <- x
            end
      else if f.fin <> f.deb then begin
            f.tab.(f.fin) <- x ;
            f.fin <- (f.fin + 1) mod (Array.length f.tab)
            end
      else failwith "File pleine";;
```

   (b) On stocke l'élément en position `f.deb` (si la file n'est pas vide) et on incrémente ce champ. Il faut bien sûr éventuellement changer la valeur du booléen.

```
let retire f =
      if f.vide then failwith "File vide";
      let x = f.tab.(f.deb) in
```

```
f.deb <- (f.deb + 1) mod (Array.length f.tab);
f.vide <- f.deb = f.fin ;
x;;
```

(c) Ces deux fonctions ont immédiatement une complexité constante $O(1)$.

2. Le seul problème de terminaison vient de la boucle conditionnelle. On a un premier invariant de l'algorithme (qui est immédiat puisque $D[s]$ n'est modifié que lorsque s est ajouté à la file).

$$(I_1) : s \text{ est ou a été dans } F \text{ si et seulement si } D[s] < \infty$$

On observe alors que la quantité "longueur de la file plus nombre de sommets s vérifiant $D[s] < \infty$" est un variant de boucle, ce qui garanti la terminaison.

3. Les initialisations ont un coût $O(|S|)$ (créations de tableaux de taille n).
La première boucle est effectuée au plus $|E|$ fois et chaque itération est en temps constant. La première boucle a donc un coût $O(n)$.
Dans la boucle conditionnelle, on regarde au plus une fois la liste des arêtes issues de chaque sommet. Cette boucle a donc un coût $O(|A|)$.
Finalement, le coût de l'algorithme 1 est $O(|S| + |A|)$.

4. On prouve le résultat par récurrence (sur le numéro de la boucle que l'on exécute).
   - Initialement, la file contient les éléments de E et les valeurs de D associées sont toutes nulles. La propriété est ainsi vraie.
   - Supposons la propriété vraie à un instant donné et supposons que la boucle s'effectue. La file contient des sommets $s_1, \dots, s_r$ avec les propriétés voulues pour D. En fin de boucle, la file contiendra des éléments $s_2, \dots, s_r, s'_1, \dots, s'_k$. Les valeurs $D[s_i]$ n'ont pas été modifiées et $D[s'_j] = D[s_1] + 1$. Comme $D[s_r] \leq D[s_1] + 1 = D[s'_1] = \cdots = D[s'_k]$, on a la propriété d'ordre. De plus
     si $r \geq 2$, $D[s'_k] - D[s_2] = D[s_1] + 1 - D[s_2] \leq 1$ et on aussi la seconde propriété
     sinon, $D[s'_k] - D[s'_1] = 0$ et on conclut encore.

5. (a) On a l'invariant suivant :

$$(I_2) : \text{si } D[s] < \infty \text{ alors } s \text{ est accessible depuis un sommet de } E.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un sommet accessible depuis un sommet de E et tel que $D[s] = \infty$ en fin d'algorithme. On peut alors choisir parmi ces sommets un élément tel que d_s est minimal. En considérant le prédécesseur t de s dans un chemin de longueur d_s entre un élément de E et s, on a donc $D[t] < +\infty$ (par minimalité) ce qui montre que t est passé par la file (invariant I_1). Mais alors, tous les voisins de t et donc s ont été ajoutés à F et $D[s] = +\infty$, ce qui est une contradiction.
On montre ensuite que l'on a l'invariant

$$(I_3) : \forall s,\ D[s] \text{ est la longueur d'un chemin d'un élément de } E \text{ à } s \text{ quand } D[s] \neq \infty.$$

On en déduit alors a fortiori que $\forall s,\ D[s] \geq d_s$ (immédiat si $D[s] = \infty$ et conséquence de l'invariant sinon).
On décrémente c à chaque fois que l'on ajoute un élément à la file. En fin de boucle, c est le nombre de sommets inaccessibles depuis E.

(b) Montrons que la propriété suivante est un invariant

$\forall s$, $D[s]$ est la longueur d'un chemin minimal d'un élément de E à s quand $D[s] \neq \infty$
si s est en tête de F, on a $D[s'] \neq \infty$ pour tout sommet s' tel que $d_{s'} \leq D[s] = d_s$.

- La propriété est initialement vraie car on traité correctement tous les éléments de E.
- On suppose que la propriété est vraie et que la boucle s'effectue. On considère l'élément s en tête de F. On modifie alors la valeur $D[s']$ quans s' est un successeur de s. Cette modification ne s'effectue que si $D[s'] = \infty$ et par l'hypothèse de récurrence, $d_{s'} > D[s]$. Comme $D[s'] = D[s]+1$ on a donc $D[s'] \leq d_{s'}$ et avec la question précédente, $d_{s'} = D[s]$.

Pour la seconde partie de l'invariant, il n'y a de problème que si la nouvelle tête t de F vérifie $D[t] > D[s]$. Avec la question 4, on a alors $D[t] = D[s] + 1$. Il s'agit donc de voir que tous les sommets à distance $D[s] + 1$ ont été incorporés à F. Ceci est vrai car tous les sommets à distance d_S ont été "traités" (hypothèse de récurrence) puis sortis de F (puisque l'on est dans le cas où $D[t] > D[s]$).

Comme en fin de boucle on a traité tous les sommets accessibles depuis E, on a $d_s = D[s]$ pour tous ces sommets en fin de boucle.

La tableau P permet de reconstruire un chemin minimal entre un sommet de E et un sommet s. $P[s]$ contient en effet ' 'la dernière arête" dans un tel chemin minimal (si $P[s] = (t, y)$, la dernière arête dans ce chemin est (s, t, y)).

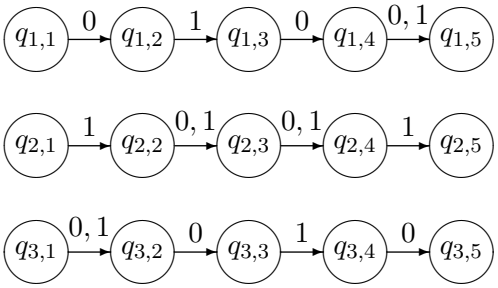
6.
```
let accessibles v e =
 (* création des tableaux et de la file *)
   let n=Array.length v in
   let f= {tab=Array.make n 0;deb=0;fin=0;vide=true} in
   let d=Array.make n (-1) in
   let p=Array.make n (-2,-1) in
   let c=ref n in
 (* fonction pour la première boucle *)
   let rec initier e = match e with
       |[]->()
       |s::q ->ajoute f s;
               d.(s) <- 0 ;
               p.(s) <- (-1,-1);
               decr c ;
               initier q
    (* fonction de parcours d'une liste d'adjacence pour un sommet *)
in let rec parcours l s= match l with
       |[] -> ()
       |(t,y)::q -> if d.(t)=(-1) then
                begin
                d.(t) <- d.(s) + 1;
                p.(t) <- (s,y);
                ajoute f t;
                decr c
                end ;
                     parcours q s
in initier e;
   while not f.vide do
      let s=retire f in
      parcours v.(s) s
      done;
   (!c,d,p);;
```

7. A partir de s, on trouve le prédécesseur dans un plus court chemin avec $p.(s)$. On obtient (s'il existe) un sommet t à partir duquel on recommence (appel récursif). On notera les points suivants en notant (t, y) la valeur de $p.(s)$.
   - Si $t = -2$, on n'a pas de chemin.
   - Si $t = -1$, $t \in E$ et on a terminé.
   - Le chemin se construit à l'envers (on obtient en premier la dernière lettre). C'est pourquoi on écrit une fonction auxiliaire faisant la construction (`creeliste`). Le résultat à renvoyer est l'image miroir de la liste créée. On aurait pu utiliser un accumulateur pour éviter d'utiliser `rev` (image miroir).

```
let chemin s p =
   let rec creeliste s =
      let (t,y)=p.(s) in
      if y=(-2) then failwith "Chemin inexistant"
      else if y=(-1) then []
      else y::(creeliste t)
 in rev (creeliste s);;
```

3 Reduction SAT

1. On ne représente ici que les transitions qui ne pointent pas vers l'état puits.



2. On peut choisir $(1, 1, 0, 0)$ ou encore $(1, 1, 1, 0)$ et on obtient des mots synchronisants (la lecture à partir de tout état mène à l'état puits).
3. La lecture d'une lettre depuis un état $q_{i,j}$ mène soit dans l'état puits soit dans l'état $q_{i,j+1}$. Un mot de longueur k à partir de $q_{i,j}$ et ne menant pas à f mène donc à $q_{i,j+k}$. Ceci n'est possible que si $j + k \leq m + 1$ et impose $k \leq m$ (puisque $j \geq 1$). Ainsi, un mot de longueur $m + 1$ est synchronisant puisqu'il amène en l'état f.
   Si u est un mot de longueur m. Par le même raisonnement, la lecture de u depuis $q_{i,j}$ avec $j \geq 2$ amène en f. u est donc synchronisant si et seulement si $q_{i,1}.u = f$ pour tout i.
4. On suppose F satisfiable et on considère le mot $v = v_1 \dots v_m$ associé à une distribution de vérité satisfaisant F. D'après la question précédente, on cherche à montrer que $q_{i,1}.v = f$ pour tout i.
   Soit $i \in [|1, n|]$. c_i étant satisfaite par la distribution, il existe un entier j tel que ($v_j = 1$ et x_j est présent dans c_i) ou ($v_j = 0$ et $\overline{x_j}$ est présent dans c_i) car une disjonction est satisfaite quand un des littéraux qui la compose l'est. On peut alors considérer le premier tel j. On a $\delta(q_{i,1}, v_1 \dots v_{j-1}) = q_{i,j}$ et la lecture de v_j mène en f.
   Ceci montre que v est un mot synchronisant.
5. Supposons, que l'on dispose d'un mot synchronisant $v = v_1 \dots v_k$ avec $k \leq m$. Comme f est un état puits, c'est l'état commun où l'on aboutit par lecture de v depuis tout état. Ainsi $\forall i,\ q_{i,1}.v = f$. Considérons la distribution donnant la valeur v_i à x_i si $i \leq k$ et une valeur quelconque arbitraire si $i \geq k + 1$.
   Supposons, par l'absurde, que la clause c_i ne soit pas satisfaite par cette distribution. On montre alors comme en question précédente que $\delta^*(q_{i,1}, v_1 \dots v_k) = q_{i,k+1}$ ce qui est contradictoire. Toutes les clauses sont donc satisfaites et F est satisfiable (et on a trouvé une distribution associée).

4 Existence

1. (a) Comme les machines considérées sont déterministes, la lecture d'une lettre depuis un ensemble d'états fait diminuer (au sens large) le nombre d'états. La suite de terme général $|Q.u_i|$ est donc décroissante. De plus, $|Q.u_r| = 1$ car le mot u est synchronisant.

(b) S'il existe un mot synchronisant u alors $\forall q, q',\ q.u = q'.u$ et on peut choisir $u_{q,q'} = u$ pour satisfaire la propriété.
Supposons maintenant que pour chaque choix de q et q' on ait l'existence d'un mot $u_{q,q'}$. La machine possède au moins deux états q_0, q_1 et on peut trouver un mot m_0 tel que $q_0.m_0 = q_1.m_0$. Ainsi, $|Q.m_0|$ est de cardinal au plus $n-1$. Si $|Q.m_0| = 1$, on s'arrête. Sinon, $Q.m_0$ possède au moins deux états et on trouve un mot m_1 tel que $|(Q.m_0).m_1| < |Q.m_0|$. On a donc $|Q.(m_0m_1)| \leq n-2$. On va alors pouvoir poursuivre la construction. On peut formaliser à l'aide d'une récurrence en construisant pour tout $k \in [|0, n-2|]$ un mot u_k tel que $|Q.u_k| \leq n-k-1$. Le mot u_{n-2} est alors synchronisant.

2. Il y a n parties à 1 élément et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ parties à 2 éléments. Ainsi

$$\widetilde{n} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. On calcule l'état q associé à $\overline{q}$. C'est une liste qui a un ou deux éléments qui sont des états de `m`. On regarde vers quels états nous mènent ces éléments (ou cet élément). On obtient un ou deux états de `m` que l'on transforme en une liste (ordonnée) puis en un entier qui est l'état cherché de $\widetilde{M}$.

```
let delta2 m e x = match (nb_to_set m.n_etats e) with
    |[i] -> set_to_nb m.n_etats [m.delta i x]
    |[i;j] -> let ei=m.delta i x
              and ej=m.delta j x
              in if ei=ej then set_to_nb m.n_etats [ei]
                 else if ei<ej then set_to_nb m.n_etats [ei;ej]
                 else set_to_nb m.n_etats [ej;ei];;
```

4. On crée un tableau `vr` de bonne taille $\widetilde{n}$ composé de listes vides. Pour chaque état $\overline{q}$ de $\widetilde{M}$ et chaque lettre x, `delta2` permet d'obtenir l'état atteint dans $\widetilde{M}$. On a donc une transition $(\overline{q}, x, \overline{q}')$ de $\widetilde{M}$. Ceci signifie que dans $\widetilde{G}_R$, on a un arc de $\overline{q}'$ vers $\overline{q}$ d'étiquette x et on met donc la case $\overline{q}'$ de `vr` à jour.

```
let retourne_machine m =
  let n=m.n_etats in
  let ntilde=n*(n+1)/2 in
  let vr=Array.make ntilde [] in
  for e=0 to ntilde-1 do
     for x=0 to m.n_lettres-1 do
        let f=delta2 m e x in
        vr.(f) <- (e,x)::vr.(f)
        done ;
     done;
  vr;;
```

5. D'après la question **4.1b**, il existe un mot synchronisant si depuis tout état du type $[i; j]$ $(i < j)$ de $\widetilde{M}$ il existe un mot $u_{i,j}$ qui nous amène dans un état $[k]$. Comme la lecture d'un mot dans $\widetilde{M}$ depuis un état $[i]$ nous amène toujours dans un état $[k]$, ceci revient à voir si tout état de $\widetilde{M}$ permet d'atteindre un état du type $[k]$.
Il s'agit donc de voir si dans $\widetilde{G}$ il existe un chemin de tout état vers un état singleton. Ceci revient à voir si dans $\widetilde{G}_R$ on peut atteindre tout état depuis les états singleton.
Il suffit donc d'appliquer `accessibles` depuis l'ensemble des états singleton à $\widetilde{G}_R$ et de voir si on peut atteindre tous les sommets du graphe.

6. La fonction `construit : int → int → int list` est telle que `construit n k` crée la liste des états $[i]$ de $\widetilde{M}$ avec $i = k, \ldots, n-1$. On utilise alors `accessibles` avec cette liste et $\widetilde{G}_R$

comme indiqué en question précédente. On obtient un triplet dont le premier élément donne le nombre d'éléments non accessibles et on regarde s'il est nul.

```
let rec construit n k =
   if k=n then []
   else (set_to_nb n [k])::(construit n (k+1));;

let existe_synchronisant m =
   let (c,d,p)=accessibles (retourne_machine m) (construit m.n_etats 0)
   in c=0;;
```