Révisions de Mécanique

Question de cours

Utilisation d'une énergie potentielle effective pour ramener, grâce aux lois de conservation, le problème primitif à l'étude du mouvement radial.

1 Satellite (Centrale 1)

On considère une navette spatiale de masse m en orbite circulaire à l'altitude h autour de la Terre. On considère le référentiel (R_0) lié au centre C de la Terre et on assimile la navette à un point matériel M distant de C de $r = R_T + h$.

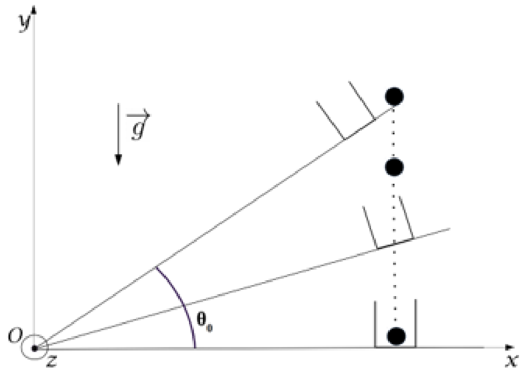
On donne les valeurs numériques suivantes :
- Rayon terrestre : $R_T = 6371\,\mathrm{km}$
- Champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
- Période de rotation de la Terre : $T_0 = 86\,400\,\mathrm{s}$

1. Pour la navette à une distance r du centre de la Terre, calculer la vitesse $v(r)$, la vitesse angulaire ω_0 et l'énergie mécanique $E(r)$.
2. Calculer l'altitude $h_{\text{géo}}$ d'un satellite géostationnaire. Est-il possible de placer ce satellite à la verticale de n'importe quel point à la surface de la Terre ?
3. Le lancement de la navette est effectué depuis la latitude λ. Déterminer la variation d'énergie mécanique entre la position initiale sur Terre et la position finale à l'orbite de rayon r.
4. Comment choisir le site de lancement pour favoriser la mise en orbite ?
5. Pour les besoins de la mission, la navette doit être placée sur une orbite à l'altitude $H = 300\,\mathrm{km}$. Deux sites de lancement sont retenus pour le lancement : la base Edwards (Latitude $\lambda_1 = 34{,}91°$) et le site de Cape Canaveral (Latitude $\lambda_2 = 28{,}39°$). Calculer l'économie d'énergie par unité de masse lors du lancement en choisissant le site le plus adapté.
6. Calculer la vitesse $v(r)$ de la navette associée à cette altitude.

2 Gobelet et bille (Centrale 1)

On considère une planche en bois de longueur L, accrochée à un support fixe, sur laquelle un gobelet et une bille sont posés à l'instant $t = 0$. Le gobelet est très léger en comparaison de la

planche, et lui est solidaire. On lâche la planche à $t = 0$.
On note $\theta(t)$ l'angle formé par la planche à l'instant t, et on pose $\theta_0 = \theta(0)$.
On observe que lorsque la planche est au sol, la bille est à l'intérieur du gobelet.



Données :

- Masse de la bille : m
- Masse de la planche : M
- Moment d'inertie de la planche : $J = \frac{1}{3}ML^2$
- Vitesse initiale de la planche : nulle
- $\theta_0 = 30°$
- $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$

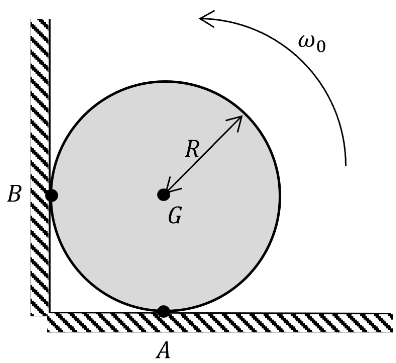
1. Exprimer le temps de chute de la bille T_{bille} et le calculer.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
3. Déterminer l'expression de $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de θ et des autres paramètres du problème.
   On donne :
$$\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = 1.52$$
4. Calculer le temps de chute de la planche T_{planche}. Cette valeur est-elle cohérente avec les observations ?

3 Frottements solides (Mines)

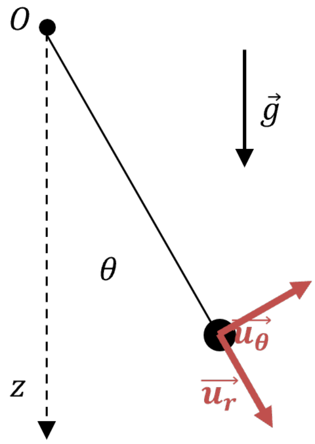
On considère un cylindre de masse m, de rayon R, de centre de masse G.
Ce cylindre est placé sur le sol (contact au point A), tangent à un mur (au point B). Le cylindre tourne initialement à la vitesse angulaire ω_0.
On donne :

- $J = \frac{3}{2}mR^2$
- Coefficient de frottement f (supposé identique en A et en B)

Déterminer le nombre N de tours que fera le cylindre avant de s'arrêter.



4 Positions d'équilibre (Mines)



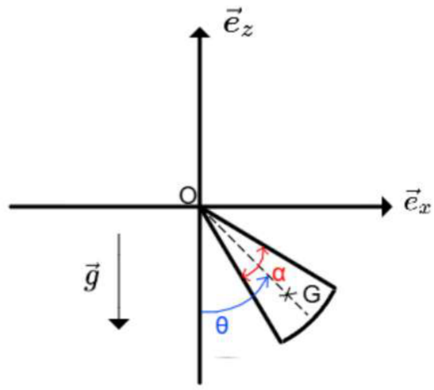
On considère une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige inextensible, sans masse, de longueur l fixée en O à un support en rotation d'axe $(O, \overrightarrow{u}_z)$ à la vitesse de rotation constante ω dans le référentiel terrestre.

1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Déterminer leur stabilité.

5 Balancier de montre mécanique (Centrale 2 2025)

Fichier Python : EcElève.py
Certaines montres ne possèdent pas de piles et se rechargent grâce aux mouvements du poignet qui font tourner un balancier. Ce balancier est une section de disque, d'épaisseur constante.
On donne :

- sa masse : m,
- son angle d'ouverture : α,
- son moment d'inertie en O par rapport à $\vec{y}$: $J = \frac{1}{2}mR^2$,
- la distance de O au centre de masse : $d = OG = R\frac{\sin\left(\frac{4}{3}\alpha\right)}{3\alpha}$.



On modélise l'accélération transmise par le poignet en O par $\vec{a} = a(t)\vec{e}_x$.

1. Le référentiel attaché à O est-il galiléen ?
2. Expliquer pourquoi d dépend de α.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.
4. En supposant que l'angle du balancier reste modéré et que $|\theta| \ll \frac{|a(t)|}{g}$, simplifier cette équation différentielle.
5. On considère maintenant $a(t)$ constant pendant une durée τ. Déterminer l'énergie cinétique maximale du balancier.
6. À l'aide du code Python, montrer qu'il existe une valeur de α maximisant cette énergie cinétique.
7. Quelle(s) condition(s) τ doit-il respecter pour valider ce modèle ?
8. Discuter des possibilités d'amélioration du modèle de $a(t)$.

6 Particule chargée dans un champ magnétique (Centrale 2 2025)

On considère une particule de charge $q > 0$ et de masse m soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u}_z$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{u}_x$. On pose $\omega = \frac{qB}{m}$.

1. Quelle est la trajectoire de la particule ? Calculer les équations du mouvement.

On étudie à présent le cas où cette particule est soumise à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\gamma \overrightarrow{v}$. On pose $\tau = \frac{m}{\gamma}$.

2. Quelle est la loi vérifiée par $v = \|\overrightarrow{v}\|$?

3. Déterminer $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Trouver M_∞, le point d'arrêt de la particule. Dessiner l'allure de la trajectoire.