# Révisions d'Électromagnétisme 1

## Questions de cours

- Lois locales et intégrales de l'électrostatique.
- Démonstration de la capacité d'un condensateur plan assimilé à la superposition de deux plans infinis de charges opposées.

## 1 Electrostatique (CCINP)

On se place dans le plan cartésien $(O, x, y, z)$.

**1**) On considère la configuration suivante : deux plans infinis à $x = +a$ et $x = -a$. L'espace entre ces deux plans est rempli de particules chargées avec une charge volumique $\rho$.

**a**) En se servant des symétries et invariances en $M(x, y, z)$, déterminer $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace. Que vaut le champ pour $x = 0$ ?

**b**) Représenter $E$ en fonction de $x$ ($\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}$, $\vec{u}$ direction du champ).

**2**) On considère la configuration suivante : trois plans infinis en $x = +a$, $x = 0$ et $x = -a$. Les charges sont telles que :

- charge volumique $\rho_0 > 0$ dans l'espace tel que $0 < x < a$,
- charge volumique $-\rho_0$ dans l'espace tel que $-a < x < 0$,
- $q = 0$ partout ailleurs.

**a**) En se servant de la question 1, déterminer le champ électrostatique pour $x > a$ et $x < -a$.

**b**) Déterminer le champ électrostatique pour $-a < x < a$.

**c**) Représenter $E$ en fonction de $x$ ($\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}$, $\vec{u}$ direction du champ).

**3**) On considère un électron se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dirigée selon l'axe des $x$ dans la configuration de la question 2.

**a**) Étudier le mouvement de l'électron en différenciant le cas où il arrive de $x > 0$ et le cas où il arrive de $x < 0$.

**b**) Que modélise la configuration de la question 2 ?

## 2 Potentiel de Yukawa (Mines Telecom 2025)

Soit $a > 0$. On s'intéresse au potentiel suivant :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

**1)** Déterminer $\vec{E}$. Quelle situation retrouve-t-on pour $r \ll a$ ?

**2)** On suppose que ce champ est créé par une charge ponctuelle $q > 0$ et une distribution de charge $\rho^-$. Exprimer $\rho^-$.

**3)** À quelle situation ce modèle peut-il convenir ?

**Données (coordonnées sphériques) :**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, X = \frac{\partial X}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial X}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\text{div}\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

## 3 Foudre (Mines)

On modélise la foudre par un fil parcouru par un courant $I$ permanent. La foudre frappe un cône d'angle $\alpha$ par sa pointe. Dans le cône, les courants se répartissent de manière radiale et isotrope. Déterminer le champ $\vec{B}$ en tout point de l'espace.
**Donnée :** L'aire d'une calotte sphérique de rayon $r$ et de demi-angle au centre $\alpha$ est $2\pi r^2(1 - \cos\alpha)$.

## 4 Champ magnétique de bobines (CCINP 2025)

On considère deux bobines coaxiales de rayon $R = 20\,\text{cm}$, séparées d'une distance $R$, comportant $N$ spires chacune.

**1)** Indiquer le sens des courants dans chaque bobine. Montrer que le champ magnétique en un point $M$ situé sur l'axe des abscisses s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B_x(M)\vec{e}_x$$

On donne la représentation de $B_x$ en fonction de la position $x$ sur la Figure 2

**2)** On ajoute, en $x = 0$, une aiguille aimantée de longueur $L = 2\,\text{cm}$, soumise à un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, pouvant tourner autour de l'axe $Oz$ (liaison pivot parfaite), et de moment d'inertie $J$. Montrer que le champ autour de l'aiguille peut être considéré comme uniforme.

**3)** À l'aide d'un théorème de la mécanique, exprimer la période $T$ des petites oscillations en fonction de $J$, $M$ et $B_x$.

**4)** En déduire comment mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Donner un ordre de grandeur.

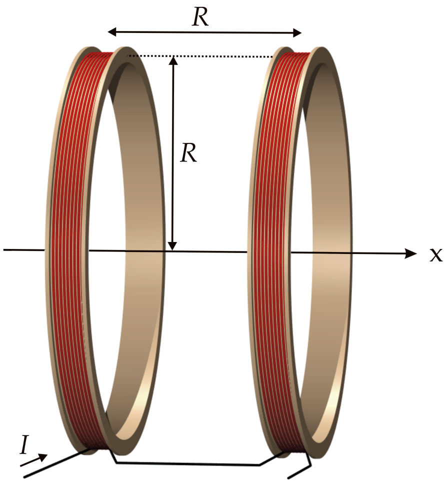


FIGURE 1 – Bobines de Helmoltz

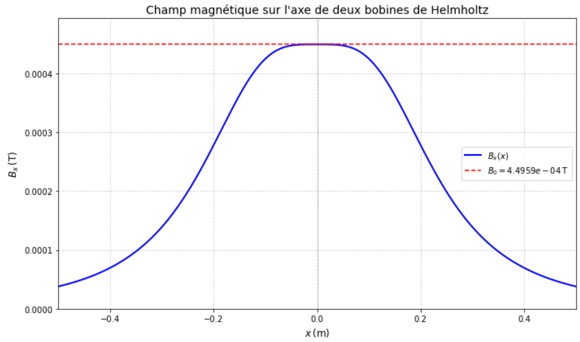


FIGURE 2 – Représentation de $B_x$ en fonction de $x$ pour $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$

# 5 Induction (Mines)

On prend un rail de Laplace avec un condensateur de capacité $C$ et un résistor de résistance $R$. Pour $t < 0$, le circuit est ouvert et le condensateur a une charge $q_0$. On ferme le circuit à $t = 0$.

**1)** Montrer que la tige $AB$, de masse $m$, atteint une vitesse limite $v_\infty$.

**2)** Calculer le rendement de ce système :

$$\mu = \frac{\text{énergie mécanique de la tige } (t \to \infty)}{\text{énergie électrique initiale du condensateur}}$$

# 6 Four à induction (Mines)

**1)** On considère un solénoïde infini, de rayon $R$, d'axe $(Oz)$ comprenant $n$ spires par unité de longueur, parcouru par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. En admettant que le champ magnétique extérieur au solénoïde est nul, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. On posera $B_0 = \mu_0 n I_0$.

**2)** On admet que le champ électrique s'écrit $\vec{E}(P,t) = E(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$. Déterminer l'expression du champ électrique.

**3)** On place un cylindre de rayon $R' < R$, de longueur $L$ et de conductivité électrique $\gamma$ à l'intérieur du solénoïde. Ce cylindre baigne dans un récipient calorifugé contenant 5 kg d'eau. Calculer le temps $\tau$ au bout duquel la température de l'eau passe de $T_i = 300\,\mathrm{K}$ à $T_f = 350\,\mathrm{K}$.

4) **Question supplémentaire :** On a considéré que le champ magnétique n'était pas modifié par la présence du cylindre conducteur. Déterminer le champ magnétique créé par les courants induits dans le cylindre en considérant que $R' \ll R$. En déduire une condition pour que l'hypothèse soit valable.

   **Donnée :** Épaisseur de peau dans un conducteur

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$