

Questions à préparer pour la rentrée 2026

Pour les énoncés de théorème on demande l'énoncé complet du résultat ainsi que sa démonstration.

En cas de question, vous pouvez me contacter à cette adresse mail : anne.devys@gmail.com.

Il y aura un petit test à la rentrée.

Bon courage et bel été.

AD

1. Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), alors f est injective (resp. g est surjective).
2. Composée de deux injections (resp. surjections).
3. Résoudre $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = \sqrt{2}$.
4. CCINP 84
 - (a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
 - (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.
5. CCINP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

 - (a) On suppose $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
 - (b) On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.
6. Linéariser $\sin^6 t$.
7. Pour $t \in \mathbb{R}$, donner sous forme factorisée $C_n(t) = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$.
8. Déterminer, selon les valeurs de $\theta \in]-\pi, \pi]$, le module et l'argument de $z = 1 + e^{i\theta}$ et $z = 1 - e^{i\theta}$.
9. Racines carrées d'un complexe non nul, les 2 méthodes avec application au calcul des racines carrées de $z = 1 + i$. En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
10. Description de $\mathbb{U}_n$ avec la démonstration.
11. La fonction arctan : définition et étude complète.
12. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{sg}(x) \frac{\pi}{2}$ et que $\forall x \in [-1; 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
13. Montrer que $\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
14. Calculer $\int^x \frac{2t+2}{t^2+t+1} dt$.
15. Calculer $\int^x (t-1) \sin(2t) e^t dt$.
16. Soit $I : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$. Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que I est constante égale à 0 de deux façons différentes.
17. Intégrales de Wallis. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.
18. CCINP 31
 - (a) Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
 - (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.
Seuls les 5/2 sont autorisés à appliquer la méthode de variations des constantes.

19. CCINP 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- (a) Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 - (b) Résoudre (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 - (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
20. Résoudre sur $]0, +\infty[$, $ty'(t) - y(t) = t^2 e^t$. (Recherche de la solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante).
21. Résoudre $y'' - 2y' + y = \cosh t$.
22. Résoudre $y'' + y = \sin^3 t$.
23. Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
24. Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe.
Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est un sous-groupe de G et $\text{Im } \varphi$ est un sous-groupe de H .
25. $(A, +, \times)$ un anneau alors $(\mathcal{U}(A), \times)$ est un groupe.
26. CCINP 86

(a) Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$ alors $p \wedge (ab) = 1$.

(b) Soit p un nombre premier.

i. Prouver que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ et en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

ii. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.

Indication : procéder par récurrence.

iii. En déduire, pour tout entier naturel n , que

$$p \text{ ne divise pas } n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

27. CCINP 94

(a) En raisonnant par l'absurde, montrer que le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$ n'a pas de solution x appartenant à $\mathbb{Z}$.

(b) i. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

ii. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

Soit $c \in \mathbb{Z}$.

Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

(c) On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 5 \pmod{16} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

i. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

ii. Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière x_0 .

28. CCINP 1

(a) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

29. Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$ avec A non vide et B bornée, alors $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(B) \leq \inf(A)$.

30. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

31. Théorème de Césaro.

32. Montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On note x_n cette solution. Étudier la monotonie de (x_n) et sa convergence.

33. Théorème des suites adjacentes.

34. CCINP 85

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

i. Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, une expression de P en fonction des $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.

ii. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :

a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.

(b) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

35. CCINP 87

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n + 1$ réels deux à deux distincts.

(a) On souhaite montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n + 1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

i. Montrer que si un tel polynôme existe alors il est unique.

ii. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer l'existence d'un polynôme L_k tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

iii. Conclure.

(b) Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

36. Formule de Taylor polynomiale.

37. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ de $\frac{1}{X^{2n} - 1}$.

38. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $\frac{X}{(X - 1)(X^2 + 1)^2}$.

39. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$.

40. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), M = S + A$.

41. Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (avec le calcul des puissances de la matrice d'Attila).

42. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$. En déduire A^n .

43. Critère séquentiel pour la limite.

44. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

45. CCINP 3

(a) On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

(b) On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

- (c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.
46. Soit f une fonction $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. On note $J_f = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\}$.
- (a) On suppose que f est continue sur $[0, 1]$. Montrer que $J_f \neq \emptyset$.
- (b) On suppose en outre que $f \circ f = f$. Montrer que J_f est un intervalle.
47. CCINP 4
- (a) Énoncer le théorème des accroissements finis.
- (b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
- (c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
- Indication** : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
48. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $L_n = [(X^2 - 1)^n]^{(n)}$ possède n racines réelles distinctes dans $] -1, 1[$.
49. CCINP 43
- (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
- i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
- ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- (b) Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que
- $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\arctan x).$$
50. Étudier la suite récurrente définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$. Donner un équivalent de u_n .
51. Théorème du point fixe pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
52. Théorème de Cesaro.
53. Soit $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E . Soit $u \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$. Alors $\mathcal{L} \cup \{u\}$ est une famille libre de E .
54. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ base de E .
 f est injective / surjective / bijective $\Leftrightarrow$ la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre / génératrice / base de F .
55. CCINP 55
- Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$
- (a) i. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
ii. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
- (b) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
- Indication** : discuter suivant les valeurs de a .
56. CCINP 60
- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.
- (a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- (b) f est-il surjectif ?
- (c) Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- (d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?
57. CCINP 76
- Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

- (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales de fonctions de E .
 ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
- (b) Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.
 Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in F \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .
- 58.** Convergence de la somme de Riemann (preuve dans le cas lipschitzien).
- 59.** Formule de Taylor Laplace.
- 60.** CCINP 62
 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.
 (a) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
 (b) Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$
 (c) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
 Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.
- 61.** CCINP 64
 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .
 (a) Démontrer que : $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f \implies \text{Im}f = \text{Im}f^2$.
 (b) i. Démontrer que : $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \iff \text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.
 ii. Démontrer que : $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \implies E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.
- 62.** CCINP 90
 $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
 Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.
 (a) Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$

 (b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k).$$

 i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
 (c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
 (d) **Application :** On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
 Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .
- 63.** CCINP 93
 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
 On notera id l'application identité sur E .
 (a) Montrer que $\text{Im}u \oplus \text{Ker}u = E$.
 (b) En déduire que $\text{Im}u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
- 64.** Théorème d'isomorphisme + application au théorème du rang.
- 65.** E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, H_1 et H_2 deux hyperplans de E , $H_1 \neq H_2$, alors $\dim H_1 \cap H_2 = n - 2$.
 Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de dimension $n - 2$ s'écrit comme intersection de deux hyperplans de E .
- 66.** CCINP 59
 Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
 Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .
 On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.
 (a) Démontrer que f est bijectif de E dans E de deux manières :
 i. sans utiliser de matrice de f ,
 ii. en utilisant une matrice de f .

(b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. *Indication* : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

67. CCINP 71

Soit p , la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

(a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

68. Rang d'un projecteur.

69. Caractérisation du rang avec la matrice J_r .

70. CCINP 63

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

(a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n .

71. Déterminant de Van der Monde.

72. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

73. Séries de Bertrand.

74. CCINP 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

(a) Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

75. CCINP 5

Série de Bertrand particulière.

(a) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. **Cas** $\alpha \leq 0$. En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

ii. **Cas** $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

(b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

76. CCINP 7

(a) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.

On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

Montrer que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

- (b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(i + (-1)^n) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$. (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

77. CCINP 8

Séries alternées. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

- (a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

- (b) i. Étudier la convergence pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

78. CCINP 46

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

- (a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
- (b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge.
- (c) $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge-t-elle absolument ?

- 79. Série exponentielle :** montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ + démonstration de la propriété de morphisme par produit de Cauchy.

80. CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- (a) Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$.

- (b) Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

- (c) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

81. CCINP 39

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

- (a) i. Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

- ii. Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 .

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

- (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.

Démontrer que φ est une application linéaire de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

- (c) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$).

Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

82. CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

- (a) Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
- (b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
- Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

83. CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- (a) Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
- (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

84. CCINP 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$, où $\text{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
- Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
- Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

85. CCINP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

86. CCINP 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
- Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer $F^\perp$.

87. Existence de base orthonormée.

88. On munit l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base obtenue à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

89. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.

On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F .

90. CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

- (a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
- (b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- (c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

91. CCINP 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C .

A l'instant $t=0$, il se trouve au point A .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement "l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".

On note B_n l'événement "l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".

On note C_n l'événement "l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".

On pose $P(A_n) = a_n, P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

- (a) i. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
- ii. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (c) On admet qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. Déterminer P et D .

Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

- (d) Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n .

Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

92. CCINP 105

- (a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

- (b) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

- i. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.

Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.

Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

- iii. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

93. CCINP 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

(a) Calculer p_1 .

(b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

94. CCINP 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

(a) Déterminer la loi de X .

(b) Déterminer la loi de Y .

95. Si $f : E \rightarrow F$ avec $\text{card } E = \text{card } F$ alors :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

96. Démonstration combinatoire de la formule de Vandermonde : pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in \llbracket 0, a+b \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ (on redonnera la formule à l'étudiant).

97. Si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

98. CCINP 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

(a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

i. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

ii. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

(b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

i. Déterminer la loi de X .

ii. Déterminer la loi de Y .

99. CCINP 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

(a) Donner la loi de X . Justifier.

(b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

i. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.

ii. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.

iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z .

100. CCINP 99

(a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(b) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \in L^2$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}$.

(c) **Application**

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

101. CCINP 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

(a) Préciser les valeurs prises par X .

(b) i. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

ii. Finir de déterminer la loi de probabilité de X .

(c) i. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

ii. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

102. CCINP 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

(a) Déterminer la loi de X .

(b) Déterminer la loi de Y .

103. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, loi de $Z = X + Y$. Interprétation.

104. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.