1. Soit $\alpha = 2^{2/3}$.

a. Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

b. On travaille dans $E = \mathbb{R}$, considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\alpha^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un sous-espace de dimension 3 de E.

c. L'ensemble F est-il un sous-corps de $\mathbb{R}$?

2. Soit p un nombre premier. Montrer que $\overline{-1}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1\ [4]$.

3. Soient $E = \{Q^2 + XR^2\ ;\ (Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P(x) \geqslant 0\}$.

a. Montrer que E est stable par produit.

b. Comparer E et F.

4. Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie $n \geqslant 2$, commutative et intègre.

a. Soit $a \in A$. Montrer que $f_a : x \longmapsto ax$ est une application linéaire. Montrer que, si $a \neq 0$, alors a admet un inverse.

b. Soit $a \in A$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(a) = 0$.

c. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{C}$.

5. Soit $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto \dfrac{P(X)+P(-X)}{2} + \dfrac{X\big(P(X)-P(-X)\big)}{2}$.

a. Montrer que f est linéaire.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est l'ensemble des polynômes de la forme $(X-1)Q$, où Q est un polynôme impair.

c. Montrer que $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

d. Caractériser f.

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^5)$ tel que $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, f = 3$. Déterminer $\mathrm{rg}\, f^2$.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u une involution linéaire de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.

a. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? Est-il diagonalisable ?

b. On suppose que le sous-espace propre $E_1(u)$ associé à la valeur propre 1 est une droite ; on dira dans ce cas que u est une involution minimale.
Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E \setminus \{0\}$ et une forme linéaire φ sur E vérifiant $u(x) = -x + \varphi(x)a$ pour tout $x \in E$.

c. Un endomorphisme v de E est appelé une transvection s'il existe un vecteur non nul b et une forme linéaire non nulle θ vérifiant $\theta(b) = 0$ tels que $v(x) = x + \theta(x)b$ pour tout $x \in E$.
Montrer qu'un endomorphisme est une transvection si et seulement si c'est la composée de deux involutions minimales ayant le même sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

8. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\, u = r < n$, $\sum_{k=1}^{r+1} u^k = 0$ et $(u, u^2, \ldots, u_r)$ libre.

a. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$.

b. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ vérifie $a_{ij} = 1$ si $i = j+1$, $a_{ij} = -1$ si $j = r$, et $a_{ij} = 0$ dans tous les autres cas.

9. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet-il forcément un plan stable ?

10. Soient f et g deux endomorphismes non nuls de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $f \circ g = 0$.

a. Soit λ une valeur propre non nulle de g ; montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ contient un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ.

b. Montrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

11. On dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie la propriété (P) si $\exists \alpha \in \mathbb{C} \quad A + {}^t\mathrm{Com}A = \alpha I_n$ où $\mathrm{Com}A$ est la comatrice de A.

a. Déterminer les matrices ayant la propriété (P) dans le cas $n = 2$. On supposera dans la suite $n \geqslant 3$.

b. Rappeler la relation entre ${}^t\mathrm{Com}A$ et A^{-1} dans le cas où A est inversible. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifie (P), montrer que toute matrice semblable à A vérifie (P).

c. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, non scalaire, et n'ayant qu'une valeur propre. Montrer que A vérifie (P) si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mu^{n-2} = 1$, et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $N^2 = 0$, tels que $A = \mu I_n + N$.

d. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ayant deux valeurs propres distinctes, et vérifiant (P). Montrer que A est diagonalisable. Conclure.

12. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. On choisit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in E^2$, et on définit l'application φ par $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = (x|u)(y|v) + (x|v)(y|u) + \alpha(x|y)$.

a. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

b. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique telle que $\varphi(x, y) = \big(x \big| f(y)\big)$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

c. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.

d. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, r et r' dans $\mathbb{R}_+$, et $\theta \in \mathbb{R}$, tels que $u = re_1$ et $v = r' \cos\theta e_1 + r' \sin\theta e_2$.

Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$, et en déduire une condition sur r, r', θ et α pour que φ soit un produit scalaire.

13. a. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = A{}^tA$.

b. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAA = A{}^tA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$.

c. Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$ et $A^2 - A + I_2 = 0$.

14. (*Pour préparer l'exercice suivant, un peu abrupt*).

Soient E un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

a. Montrer que $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \big(f(x)|y\big) = -\big(x|f(y)\big)$. Si $x \in E$, que vaut $\big(x|f(x)\big)$? Quelles sont les valeurs propres possibles pour f ?

b. On suppose trouvé un sous-espace F stable par f ; montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f.

c. On suppose $f \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2, irréductible sur $\mathbb{R}$, tel que $\mathrm{Ker}\, P(f) \neq \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, P(f) \setminus \{0\}$; montrer que $\mathrm{Vect}\big(x, f(x)\big)$ est un plan stable par f.

d. On suppose f bijective. Montrer que $\dim E$ est paire, et qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, les blocs étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

15. a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(S, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $M = S + A$, ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$.

Montrer que M et ${}^tM$ commutent si et seulement si S et A commutent.

b. (*voir exercice précédent*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et antisymétrique. Montrer que n est pair. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale par blocs, les blocs étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

c. Énoncer et démontrer un résultat de réduction analogue à celui du **b**, portant sur les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tMM = M{}^tM$.

16. Soient $r \in]0, 1[$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $t_{ii} = r$ pour tout i, $t_{ij} = a$ si $j > i$, et $t_{ij} = 0$ si $j < i$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$. Montrer que la série $\sum T^p$ converge.

17. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$: si $M = (m_{ij})$, alors $\|M\|_\infty = \max\big\{|m_{ij}| \,;\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\big\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $\|A^2 - I_n\|_\infty \leqslant 1/n$. On définit une suite (M_p) de matrices par $\quad M_0 = A \quad$ et $\forall p \in \mathbb{N} \quad M_{p+1} = 2M_p - M_pAM_p$.

a. Si $(M, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, majorer $\|MP\|_\infty$ en fonction de $\|M\|_\infty \|P\|_\infty$.

b. Montrer que la suite (AM_p) converge, et déterminer sa limite.

c. Montrer que A est inversible. Montrer que (M_p) converge, et donner sa limite.

18. Soient E un espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que, si f transforme chaque partie bornée en une partie bornée, alors f est continue.

b. Montrer que, si f transforme chaque suite de limite 0_E en une suite bornée, alors f est continue.

19. Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que l'ensemble des familles libres (u, v) de deux vecteurs est un ouvert de E^2.

20. (*Pour cet exercice, il vaut mieux savoir que les seules matrices carrées commutant avec toutes les matrices sont les matrices scalaires ; exercice classique, que je vous encourage à traiter.*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$. On veut déterminer les points isolés de Z_n, c'est-à-dire les $M \in Z_n$ pour lesquels il existe un voisinage V de M tel que $Z_n \cap V = \{M\}$.

a. Déterminer les points isolés de Z_1. On suppose désormais $n \geqslant 2$.

b. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que, pour tout $H \in V_0$, $I_n + H$ soit inversible.

c. Soit M un point isolé de Z_n. Montrer qu'il existe un voisinage V_1 de 0 tel que, pour tout $H \in V_1$, $(I_n + H)^{-1}M(I_n + H) = M$.

En déduire que M commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Conclure.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Construire une suite (M_k) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, deux à deux distinctes, convergeant vers λI_n, et vérifiant $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0$ pour tout k.

En déduire que λI_n est un point isolé de Z_n si et seulement si λ est racine simple de P.

21. Soit (u_n) une suite réelle de limite $+\infty$, telle que $u_{n+1} - u_n$ ait pour limite 0 ; soit (v_p) une suite réelle de limite $+\infty$.

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{n+q} - v_p$.

Montrer que l'on peut choisir (p, q) de manière à avoir $w_0 \leqslant a$ et $w_{n+1} - w_n < b - a$ pour tout n.

b. Montrer que l'ensemble $\{u_n - v_p \,;\, (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\{\sin(u_n) \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

d. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

22. Soit K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f(K) \subset K$.

Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.

23. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^b}$. Étudier la convergence de la série de terme général a^{S_n}.

24. Étudier la sommabilité des familles $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ et $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

25. **a.** Soit a_n une suite réelle vérifiant $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

c. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$. Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$; calculer cette somme.

26. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles positives, et bornée sur $\mathbb{R}_+$. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f''(x) \geqslant \alpha^2 f(x)$.

a. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que f' et f ont pour limite 0 en $+\infty$.

c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leqslant f(0)e^{-\alpha x}$.

27. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt$.

a. Soit $S = \{f \in E \mid \|f\|_\infty = 1\}$. Déterminer $M = \sup\{|\varphi(f)| \,;\, f \in S\}$ et montrer que M n'est pas atteint sur S.

b. Montrer que $F = \{f \in E \mid \varphi(f) = 1\}$ est un fermé de E. Calculer la distance de la fonction nulle à F.

28. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\| \; \|_\infty$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $L(f)$ par $\quad L(f)(1) = 0 \quad$ et $\quad \forall x \in [0,1[\quad L(f)(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,dt.$

a. Montrer que L est un endomorphisme continu de l'espace E, et déterminer le plus petit réel k vérifiant $\forall f \in E \quad \|L(f)\|_\infty \leqslant k\|f\|_\infty$.

b. Soit $f \in E$ vérifiant $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $L(f)(x)$ quand x tend vers 1.

29. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Soit d'autre part $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n définie par $\quad \forall p \in [\![1,n]\!] \quad \forall t \in \left]\dfrac{p-1}{n}, \dfrac{p}{n}\right] \quad g_n(t) = \dfrac{n}{p} - \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$. Exprimer $\int_0^1 g_n(t)\,dt$ en fonction de U_n et $H_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$.

b. Calculer $\int_0^1 g(t)\,dt$.

c. Donner un développement asymptotique à deux termes de U_n.

30. On donne n réels $a_1, \dots, a_n$ vérifiant $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, et n réels strictement positifs $p_1, \dots, p_n$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x - a_k}$.

a. On convient que $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Soit $y \in \mathbb{R}$; montrer que l'équation $\varphi(x) = y$ admet une et une seule solution dans chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, pour $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer la somme de ces $n+1$ solutions.

b. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que l'intégrale $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f\big(\varphi(t)\big)\,dt$ converge.

c. Montrer que $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\big(\varphi(t)\big)\,dt.$

31. Montrer que $\quad \displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad$ quand n tend vers $+\infty$.

32. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$; soit $G : x \longmapsto \int_0^x f(t)\sin t\,dt$.
Montrer que $\sum a_n$ converge. La fonction G a-t-elle une limite en $+\infty$?

b. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $t \longmapsto f(t)\sin t$ l'est.

33. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telles que f, f' et f'' soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que l'ensemble F des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y''+y'+y = 0$ est un sous-espace vectoriel de E.

b. Pour tout $f \in F$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(t)^2 - f'(t)^2 + f''(t)^2\big)\,dt = \big(f(0) + f'(0)\big)^2.$

L'application $\quad \varphi : (f,g) \longmapsto \int_0^{+\infty} \big(f(t)g(t) - f'(t)g'(t) + f''(t)g''(t)\big)\,dt \quad$ est-elle un produit scalaire sur F ?

34. Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^\alpha)^n}.$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la définition de u_n, et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\quad \ln(u_n) - a\ln n - b \quad$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$; on précisera la valeur de a.

c. Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{n^\beta}$ est-elle convergente ?

d. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge, et donner une expression de sa somme sous forme intégrale.

35. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}.$

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer un équivalent de $f(t)$ en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

36. Pour $x > 0$, on pose $\quad f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)}$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier sa continuité, sa monotonie et ses limites en 0 et $+\infty$.

b. Trouver un équivalent de f en 0 et en $+\infty$; on pourra étudier $f(x) + f(x+1)$.

37. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $\quad g(x) = \pi \dfrac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$, $\quad h(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right)$ $\quad$ et $f(x) = g(x) - h(x)$.

a. Montrer que h est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et que g et h sont 1-périodiques.

b. Montrer que g est continue sur chaque intervalle $]k, k+1[$ où $k \in \mathbb{Z}$; et que f est prolongeable par continuité en tout $k \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad g(x) = \dfrac{1}{2}\left[g\left(\dfrac{x}{2}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \right]$ $\quad$ et que les fonctions h et f vérifient la même relation.

d. Montrer que $g = h$.

38. Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes ne s'annulant pas ; soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

a. Que peut-on dire du rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum a_n b_n x^n$?

b. Que peut-on dire du rayon de convergence R_2 de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{a_n}$?

39. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. En étudiant $(1-x)f(x)$, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^-.
Que peut-on dire du comportement de f au voisinage de -1 ?

40. **a.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, et donner son rayon de convergence. On notera $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ ce développement.

b. En utilisant un développement asymptotique de $\ln |a_{n+1}| - \ln |a_n|$, montrer qu'il existe une constante C, que l'on ne cherchera pas à déterminer, telle que $\quad |a_n| \sim C n^{-1-\alpha} \quad$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Pour quelles valeurs de α la série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

d. Pour ces valeurs, calculer $\sum_{n \geqslant 0} a_n$; on pourra s'intéresser à la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

41. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a. Donner le domaine de définition de f.

b. Calculer $f(0)$ en appliquant une formule de Taylor sur $[0,1]$ à $x \longmapsto \ln(1+x)$.

c. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 ; on exprimera les coefficients de ce développement à l'aide de la fonction $\zeta : a \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

42. Soit $q \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et f une solution non nulle de l'équation $y'' + q(t)y = 0$. Montrer que f ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur $[0,1]$.

43. Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives. On suppose que l'équation $y'' + q(t)y = 0$ admet une solution f strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et on pose $g = f'/f$.

a. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

b. Montrer que f est décroissante positive.

c. Que peut-on en conclure sur l'intégrabilité de q sur $\mathbb{R}_+$?

44. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$; soit $q \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, à valeurs négatives. Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$; on note (E) l'équation différentielle $y'' + q(t)y = g(t)$, et (E_0) l'équation homogène associée.

a. Soit f_0 une solution de (E_0) ; étudier sa convexité.

b. Montrer que (E) admet une et une seule solution f vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

45. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{T}^n$.

a. Calculer $P(A_1 \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$.

b. Soit $E = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \{A_2, \overline{A_2}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in E} P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$.

46. Soit (x_n) une suite à valeurs dans $[0, 1]$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X \geqslant n) > 0$ et $P(X = n \,|\, X \geqslant n) = x_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X \geqslant n)$ puis $P(X = n)$.

47. Un athlète réalise une série de sauts. Il s'arrête au premier échec, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de réussir le k-ième saut est $1/k$. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier échec.

a. Déterminer la loi de X, et montrer que X est presque sûrement fini.

b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

48. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; soit G_X sa fonction génératrice. Montrer que, pour tout $r \in\,]0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Quel résultat retrouve-t-on en faisant tendre r vers 1 ?

49. Une particule se déplace sur une suite de cases indexée par $\mathbb{N}$. Initialement, elle se trouve sur la case 0 ; toutes les secondes, elle avance d'un nombre strictement positif de cases. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on suppose que le nombre de cases franchies à la seconde j est donné par une variable aléatoire X_j ; on suppose de plus que les variables X_j sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi μ. On pose $u_i = P(X_1 = i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$; et $u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i t^i$ pour $t \in [-1, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose de plus $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note E_k l'événement "la particule passe par la case k" et $a_k = P(E_k)$. Exprimer l'événement E_k à l'aide des variables S_n.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, k]\!]$, exprimer $P\big(E_k \cap (X_1 = j)\big)$. En déduire $\quad a_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{j-k} u_j$.

c. Montrer que, pour tout $t \in\,]-1, 1[$, $A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ est bien définie, et $\quad A(t) = \dfrac{1}{1 - u(t)}$.

d. Uniquement dans cette question, on suppose que $X_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in\,]0, 1[$. Déterminer A ; en déduire la valeur des a_k.

e. On suppose ici que les entiers k vérifiant $P(X_1 = k) \neq 0$ sont en nombre fini, et que leur pgcd vaut 1. Montrer que a_k tend vers $1/E(X_1)$ quand k tend vers $+\infty$.

Indications

1. b. Si $(1, \alpha, \alpha^2)$ est liée, alors α est racine d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$, et de $X^3 - 4$, donc de leur PGCD. **c.** Si $\beta \in F \setminus \{0\}$, on peut par exemple noter que $x \longmapsto \beta x$ est un endomorphisme injectif de F.

2. Si $\overline{-1}$ est un carré, trouver un élément d'ordre 4 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Si $p \equiv 1$ [4], utiliser le théorème d'Euler, et le fait qu'un polynôme de degré n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

3. a. Écrire $(Q^2 + XR^2)(S^2 + XT^2) = (QS + XRT)^2 + \cdots$ **b.** Si $P \in F$, le décomposer en irréductibles, et montrer que les facteurs sont dans E.

4. a. Si $a \neq 0$, f_a est linéaire injective. **b.** Utiliser la dimension finie. **c.** Si $a \in A \setminus \mathbb{R}$, a a un polynôme annulateur irréductible, en déduire que A contient un a tel que $a^2 = -1$, puis que A contient une copie de $\mathbb{C}$. On a alors les zéros de tous les polynômes.

5. Décomposer systématiquement les polynômes en partie paire plus partie impaire, en exploitant l'unicité de cette décomposition.

6. Appliquer la formule du rang à la restriction à $\operatorname{Im} f$ pour obtenir $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f)$. Montrer ensuite que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) < 2$ interdirait $f^3 = 0$.

7. b. Prendre a engendrant $E_1(u)$, compléter en une base, et utiliser les formes linéaires coordonnées. **c.** Pour montrer que $u_1 \circ u_2$ est une transvection, on doit avoir $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = 2$ si on a bien choisi φ_1 et φ_2. Pour la réciproque, choisir φ_1 quelconque tel que $\varphi_1(b) = 2$ et prendre $\varphi_2 = \theta + \varphi_1$.
8. a. Appliquer le lemme des noyaux, vérifier que le deuxième terme contient $\operatorname{Im} u$. L'hypothèse d'indépendance montre que $u^r \neq 0$, donc qu'il existe $a \in \operatorname{Im} u$ tel que $u^{r-1}(a) \neq 0_E$.
9. Si $\chi_f = (X-a)Q$ et a racine simple, considérer $\operatorname{Ker} Q(f)$; si $\chi_f = (a-X)^3$ et $f \neq a\mathrm{Id}$, considérer $\operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f-a\mathrm{Id})^2$.
10. b. Raisonner sur les matrices, et par récurrence sur n. Dans le cas où g n'a que 0 comme valeur propre, montrer qu'il existe une base telle que $g(e_2) = e_1$ et $g(e_1) = 0$.
11. c. L'équation donne un polynôme annulateur de degré 2 ; montrer que ce polynôme est forcément $(X-\lambda)^2$ où λ est la valeur propre.
12. b. Cela revient à chercher A symétrique telle que $\varphi(x,y) = {}^tXAY$. **d.** Les racines r_1 et r_2 de $X^2 + aX + b$ sont strictement positives si et seulement si elles sont réelles, $r_1 + r_2 > 0$ et $r_1 r_2 > 0$.
13. a. On trouve les symétriques et les λR où R est une matrice de rotation. **b.** Si R est une matrice de rotation, ${}^tR = R^{-1}$ et $\chi_R(R) = 0$.
14. d. Prendre x comme en **c** ; dans une base orthonormée de $\operatorname{Vect}\big(x, f(x)\big)$, la matrice de l'endomorphisme induit est un bloc de la forme cherchée. Puis considérer le sous-espace orthogonal.
15. c. Décomposer M en $S + A$; les sous-espaces propres de S sont alors stables par A. Ne pas oublier que A n'est pas forcément inversible ici.
16. Écrire T sous la forme $rI_n + aJ$; utiliser le fait que $J^n = 0$ pour justifier la convergence absolue de la série. On notera en particulier que, à k fixé, le coefficient du binôme $\binom{p}{k}$ est un polynôme en p de degré k.
17. b. Après avoir noté que M_p commute avec A, étudier la suite $\big(\|AM_p - I_n\|\big)$. **c.** Utiliser la continuité du déterminant.
18. Démontrer les contraposées, en utilisant f non continue $\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \quad \|f(x_n)\| > n\|x_n\|$.
19. Penser à Cauchy-Schwarz pour caractériser l'indépendance.
20. b. Continuité du déterminant. **c.** Montrer que, si H est “proche de 0”, alors $(I_n + H)^{-1} M (I_n + H)$ est “proche de M”, et noter qu'elle est semblable à M. Pour $MA = AM$, écrire A sous la forme λH.
21. b. Le **a** montre que $]a,b[$ contient un w_n. **c.** Prendre $v_p = 2p\pi$. **d.** Prendre $v_p = p$.
22. Prendre $u_0 \in K$ et définir u_n par $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(u_0)$. Extraire une suite convergente ; et exprimer de deux manières u_{n+1} en fonction de u_n.
23. Si $a < 1$ et S_n diverge, étudier $n^2 a^{S_n}$, en cherchant si nécessaire un équivalent de S_n ; attention au cas $b = 1$.
24. Pour la première, sommation par paquets $p + q = \text{cstte}$; pour la deuxième, on peut par exemple trouver λ et μ tels que $\lambda(p+q)^2 \leqslant p^2 + q^2 \leqslant \mu(p+q)^2$ en utilisant entre autres Cauchy-Schwarz.
25. a. Sommation des relations de comparaison. **b.** Cf cours. **c.** Ce qui suit semble bien compliqué, mais je n'ai rien trouvé de plus simple. Commencer par regrouper chaque terme pair avec l'impair suivant (noter que la partie entière est la même). Décomposer chaque $k/2p(2p+1)$ en somme de k termes égaux, ce qui donne une somme double. Intervertir : on obtient une somme de restes de rang 2^q, qui converge grâce à **a**. Pour calculer la somme, exprimer ces restes en fonctions de H_n, en commençant par redécomposer les termes sous la forme $1/(2p) - 1/(2p+1)$; on obtient un terme télescopique $+ \ln 2$, la somme s'exprime en fonction de γ grâce à **b**.
26. a. Noter que $f'' \geqslant 0$; si $f'(a) > 0$, montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. **c.** Multiplier l'inégalité par f' puis primitiver.
27. a. Prendre des fonctions f égales à 1 sur $[0, 1/2 - \varepsilon]$ et à -1 sur $[1/2 + \varepsilon, 1]$. Pour montrer que 1 n'est pas atteint en $f \in S$, considérer $\int_0^1 1\,dt - \varphi(f)$ et noter que c'est la somme de deux termes positifs. **b.** Le **a** fournit déjà $d(0,F) \geqslant 1$. Multiplier les fonctions du **a** par un bon réel pour obtenir l'autre inégalité.
28. b. Écrire $f(t) = f(1) + \varepsilon(t)$; dans l'expression obtenue pour $L(f)(x)$, montrer “avec des ε” que le deuxième terme est négligeable devant le premier en 1.
29. b. Calculer $I_n = \int_{1/n}^1 g$ en découpant en intervalles $]1/(k+1), 1/k]$ et utiliser le développement asymptotique usuel de H_n. Ne pas oublier de prouver que la convergence de I_n entraîne celle de $\int_0^1 g$. **c.** Il faut évidemment démontrer que $\int_0^1 g_n$ tend vers $\int_0^1 g$.
30. a. Pour la somme, mettre l'équation sous forme polynômiale en x et utiliser les relations entre coefficients et racines. **b.** En notant φ_k la restriction de φ à $]a_k, a_{k+1}[$, poser $t = \varphi_k(u)$ dans $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$. **c.** Poser $t = \varphi_k^{-1}(u)$ dans la même intégrale ; la somme calculée en **a** permet de se débarrasser des $[\varphi_k^{-1}]'(u)$.

31. On peut par exemple poser $x = nt$ puis intégrer par parties pour faire apparaître $1/n$.
32. a. Pour la limite de G, en posant $n_x = \lfloor x/\pi \rfloor$, montrer que $G(x) - G(n_x\pi)$ tend vers 0. **b.** Pour le sens délicat, majorer les intégrales de f sur $[n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4]$ et $[n\pi + 3\pi/4, n\pi + 5\pi/4]$ à l'aide de l'intégrale sur $[n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4]$ de $f(t)\sin t$.
33. b. Pour l'égalité, partir de l'intégrale de la dérivée de $-(f + f')^2$ et montrer que les termes en trop s'éliminent.
34. a. Écrire $1 = 1 + x^\alpha - x \cdot x^{\alpha-1}$ et effectuer une intégration par parties. **b.** Écrire $\ln(u_n)$ sous la forme $\ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, effectuer un développement asymptotique de a_k et utiliser le développement usuel de H_n. **c.** La question précédente donne un équivalent de u_n.
35. a. Pour les équivalents, utiliser l'intégration des relations de comparaison. **b.** Intégrer par parties pour faire apparaître f', poser $u = e^{\sqrt{t}}$, puis développer $1/(u-1)$ en série.
36. b. Pour l'équivalent en $+\infty$, poser $u = t^x$.
37. b. Noter que la périodicité permet de se limiter à $]0,1[$ pour la continuité, et à 0 pour le prolongement. **d.** Introduire un point x_0 en lequel f est maximale sur $[0,1]$, et utiliser **c** pour montrer que f est aussi maximale en $x_0/2$.
38. a. Si $x \in]0, R_aR_b[$, le décomposer en $x = x_ax_b$ avec $x_a < R_a$ et $x_b < R_b$ pour arriver à $R_1 \geqslant R_aR_b$. On n'a pas mieux, prendre des suites avec $a_n = 1$ pour les termes pairs, $a_n = 1/n!$ pour les impairs. **b.** $R_2 \leqslant 1/R_a$, pas mieux pour les mêmes raisons.
39. b. Écrire $(1-x)f(x)$ sous la forme $\sum b_nx^n$ et développer b_n en $a/n + O(1/n^2)$; le premier terme donne du connu, le second donne une fonction ayant une limite finie en 1.
40. d. Il faut prouver que la somme vaut $f(1)$ en justifiant la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série ; quand on n'a pas convergence absolue de $\sum a_n$, montrer que R_n tend vers 0 uniformément à l'aide de la majoration du reste dans le TSSA.
41. c. Regrouper les termes deux par deux pour avoir une série absolument convergente, qui permettra de faire une interversion de sommation.
42. Prendre une suite de zéros deux à deux distincts, en extraire une suite convergente.
43. a. L'équation n'est pas linéaire. **b.** Noter que f' décroît. **c.** Noter que f' est intégrable.
44. b. Si f_1 et f_2 sont deux solutions, appliquer **a** à $f_1 - f_2$. Pour l'existence, choisir une solution de (E) vérifiant $f(a) = 0$, et noter que les solutions f_0 de (E_0) vérifiant $f_0(a) = 0$ forment une droite vectorielle.
45. b. Pour tout événement C, calculer $P(C \cup A_n) + P(C \cup \overline{A_n})$, et raisonner par récurrence.
46. Commencer par calculer $P(X \geqslant n+1 \mid X \geqslant n)$.
47. a. Commencer par calculer $P(X > k)$. **b.** Passer par la fonction génératrice accélère les choses.
48. Dans l'expression de $G_X(r)$, majorer r^k par r^n si $k \geqslant n$, par 1 sinon.
49. b. Probabilités totales, avec les $X_1 = j$ comme système complet. **c.** Pour l'égalité, la formule du **b** s'interprète comme un produit de Cauchy ; ne pas oublier que $a_0 = 1$. **e.** L'hypothèse sur le pgcd permet de montrer que le polynôme $1 - u(t)$ n'a que 1 comme racine de module 1, donc que les autres racines ont un module strictement supérieur à 1. En déduire que la contribution à a_k des pôles de A autres que 1 tend vers 0. Enfin, ne pas oublier que, si a est un pôle simple de P/Q, alors le coefficient de $1/(X-a)$ dans la DES est $P(a)/Q'(a)$.