Centrale 2015 – Oral avec Python

1. Pour $n \geqslant 1$, on note $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.

a. Écrire une fonction `prem(n)` qui renvoie vrai si n est premier et faux sinon.

b. Écrire une fonction `piprime(n)` qui renvoie $\pi(n)$.

c. Afficher les valeurs de $n/\pi(n)$ pour $n \in \{10^1, 10^2, \dots, 10^6\}$. En déduire une conjecture sur la limite de $n/\pi(n)$.

d. On suppose savoir $\forall n \geqslant 2,\ \pi(n) \leqslant 2\ln 2 \dfrac{n}{\ln n}$. Confirmer la conjecture de la question précédente.

On note (E_k) l'équation $n = k\pi(n)$ d'inconnue n, avec $k \in \mathbb{Q}$.

e. Montrer que toute solution de (E_k) est inférieure ou égale à 2^{2k}.

f. Trouver informatiquement les solutions de $(E_{11/2})$.

g. On étudie maintenant (E_k) pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. On pose $F_k = \{n \geqslant 2 \,|\, n \leqslant k\pi(n)\}$. Montrer que F_k est fini et que son plus grand élément est solution de (E_k).

2. Pour $n \geqslant 1$, on note $E_n = [\![0, n-1]\!]$ et S_n le groupe des permutations de E_n. En Python, une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$.

Pour $i \in E_n$, la période de i pour $\sigma \in S_n$ est le plus petit entier p tel que $\sigma^p(i) = i$. On le note $\mathrm{Per}(\sigma, i)$.

a. Justifier l'existence de $\mathrm{Per}(\sigma, i)$ et montrer qu'elle est plus petite que n. Préciser l'ordre de σ en fonction des $\mathrm{Per}(\sigma, i)$.

b. Écrire une fonction qui retourne la période d'un élément i pour une permutation σ.

c. Écrire une fonction qui retourne la liste des périodes, pour une permutation σ, des éléments de E_n . Application : $\sigma = [3, 6, 7, 0, 2, 1, 8, 5, 4, 9]$.

d. Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation R_σ sur E_n par : $x R_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = \sigma^k(x)$.
Montrer que R_σ est une relation d'équivalence.

On appelle orbite d'un élément x de E_n sa classe d'équivalence. On la note $\Omega_\sigma(x)$.

e. Montrer que $\Omega_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$ où $p = \mathrm{Per}(\sigma, x)$.

f. Écrire une fonction qui retourne la liste des orbites d'une permutation σ.

3. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes réels à coefficients dans $\{0, 1\}$.

a. Soient P et Q dans $\mathcal{A}$. Montrer que $P(-2) = Q(-2)$ si et seulement si $P = Q$.

b. Soit $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe P tel que $N = P(-2)$. Écrire une fonction Python de variable d'entrée N et calculant P. Donner P pour $N = 2015$.

4. Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $W = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists P \in \mathcal{P},\ P(z) = 0\}$.

a. Tracer dans le plan complexe les racines des éléments de $\mathcal{P}$ de degré inférieur ou égal à 7.

b. Montrer que W est stable par $z \longmapsto \overline{z}$ et que $W \setminus \{0\}$ est stable par $z \longmapsto 1/z$.

c. Soient $P \in W$ non nul et z une racine non nulle de P. Sans perte de généralité, on peut supposer $P(0) = 1$. Supposons $|z| < 1$ et posons $Q(X) = P(X) - 1 - \dfrac{X}{2(1-X)}$. Montrer que $|Q(z)| \leqslant \dfrac{|z|}{2(1-|z|)}$ et en déduire $\left|\dfrac{2-z}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{|z|}{1-|z|}$.

d. Soit $z \in W$ tel que $|z| > 1$. Montrer que $\left|\dfrac{2z-1}{z-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{|z|-1}$.

e. Soient $A = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z|\,|z-1| = |2-z|(1-|z|)\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-1| = |2z-1|(|z|-1)\}$. Donner pour les ensembles A et B des équations de la forme $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$. Tracer A et B sur le même graphique que la figure précédente.

f. Soit $P_n = 1 + X + X^3 + +X^{2n+1}$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n(x_n) = 0$, puis que $x_n \in [-1, 0[$.

g. Montrer que (x_n) converge vers un élément de A.

5. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Z(P)$ l'ensemble de ses racines.
Pour $(h,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, on pose $P_{h,\gamma}(z) = P(z+ih) - \gamma P(z-ih)$.

a. (On pourra utiliser `numpy.poly1d`) Écrire un script retournant $h = \max\big\{\mathcal{I}m(\alpha); \alpha \in Z(P)\big\}$. Déterminer l'ensemble des racines de $P_{h,\gamma}$ pour cette valeur de h et diverses valeurs de γ. Que peut-on conjecturer ?

b. Soit $(\alpha, z) \in \mathbb{C}^2$. Montrer :

$$\begin{aligned}|z+ih-\alpha|^2|z+ih-\overline{\alpha}|^2 - |z-ih-\alpha|^2|z-ih-\overline{\alpha}|^2 \\ = 8h\mathcal{I}m(z)\big((\mathcal{R}e(z)-\mathcal{R}e(\alpha))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2 + h^2 - (\mathcal{I}m(\alpha))^2\big).\end{aligned}$$

c. Prouver la conjecture.

6. On pose L_n la matrice triangulaire inférieure d'ordre n dont le terme d'indice $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ est le coefficient binomial $\dbinom{i}{j}$.

a. Calculer L_4^p pour $p \in [\![1, 10]\!]$. Conjecturer la forme de L_n^p pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

b. Quel est le nombre d'opérations minimal pour obtenir L_4^{11} ?

c. On pose $X_n = (1, x, \dots, x^{n-1})$. Calculer $L_n{}^t X_n$.

d. Conjecturer la forme de $L_n{}^t L_n$.

e. Montrer, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} \binom{i}{k}\binom{j}{j-k} = \binom{i+j}{j}$. Prouver la conjecture de la question précédente.

7. On considère $n \geqslant 2$ joueurs, numérotés de 1 à n, participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible dans une rencontre. On définit la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de la manière suivante : $a_{i,i} = 0$, $a_{i,j} = 1$ si i a gagné contre j, $a_{i,j} = -1$ si j a gagné contre i.

a. Écrire une fonction renvoyant une matrice de tournoi aléatoire.

b. Calculer les déterminants de telles matrices pour des entiers n pairs et impairs. Qu'observe-t-on ?

c. Démontrer la propriété postulée pour les n impairs.

d. **i.** Soit $J_n = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer $\det(J_n - I_n)$.

ii. Soient M et N deux matrices à coefficients entiers telles que $M - N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrer que $\det M$ et $\det N$ ont même parité.

iii. Démontrer la propriété postulée pour les n pairs.

8. **a.** On pose $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^5, A^{10}, A^{20} et A^{50}. Conjecture ?

ii. Calculer les valeurs propres de A. Démontrer la conjecture.

b. Soit n impair.

i. Coder en Python $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier pour $n = 9$.

ii. Montrer que la somme des coefficients de chaque ligne est une constante S.

iii. On pose $B = (1/S)M$. Montrer que 1 est valeur propre de B et que toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

iv. En déduire la limite de $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vérifier pour $n = 9$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale et une matrice T triangulaire supérieure telles que $A = OT$. Indication : on pourra commencer par le cas où A est inversible.

La fonction `numpy.linalg.qr` de Python donne une telle décomposition.

b. On pose $N_1(A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |ai, j|$. Montrer que N_1 admet un minimum m_n et un maximum M_n sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

c. **i.** Écrire une fonction `randO(n)` qui génère une matrice aléatoire A et qui renvoie la matrice orthogonale O de la question **a**.

ii. Écrire une fonction `N1` de la variable matricielle A qui renvoie $N_1(A)$. On pourra utiliser les fonctions `numpy.sum` et `numpy.abs`.

iii. Écrire une fonction `test(n)` qui, sur 1000 tests, renvoie le minimum et le maximum des valeurs de N_1 pour des matrices orthogonales aléatoires.

d. Déterminer la valeur de m_n. Pour quelles matrices, ce minimum est-il atteint ? Montrer qu'il y a un nombre fini de telles matrices.

e. Montrer que $M_n \leqslant n\sqrt{n}$. Montrer que $M_3 < 3\sqrt{3}$.

10. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à établir l'existence de $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A \Omega$ ait sa diagonale constante.

a. Démontrer le résultat pour $n = 2$ et expliciter, en fonction de A, une matrice $\Omega \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A \Omega$ a sa diagonale constante.

b. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner, à l'aide de python, B orthogonalement semblable à A de diagonale constante.

c. Soit $\Gamma = \{{}^t\Omega A \Omega \ ; \ \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que Γ est compact.

d. Soit $f : M \in \Gamma \longmapsto \sup\{|M_{ii} - M_{jj}| \ ; \ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$. Montrer que f présente un minimum.

e. En déduire le résultat annoncé.

11. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M), \lambda_2(M), \ldots, \lambda_n(M)$ ses valeurs propres triées dans l'ordre croissant.

Pour un sous-espace vectoriel F non nul de $\mathbb{R}^n$, on note : $R_M(F) = \max\{{}^tXMX \ ; \ X \in F \cap S\}$.

a. Montrer que $R_M(F)$ est bien défini.

b. **i.** Écrire une fonction qui, pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, renvoie la liste de ses valeurs propres triées par ordre croissant $[\lambda_1(M), \lambda_2(M), \ldots, \lambda_n(M)]$.

ii. Écrire une fonction qui, pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ distincts, renvoie la liste des nombres : $\dfrac{|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)|}{\max\{-\lambda_1(A - B), \lambda_n(A - b)\}}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

iii. Tester cette fonction pour des matrices symétriques aléatoirement choisies.

c. Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres associés à $\lambda_1(M), \ldots, \lambda_n(M)$ respectivement. On fixe $d \in [\![1,n]\!]$.

i. Montrer que $R_M\big(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_d)\big) = \lambda_d(M)$.

ii. Soient F de dimension d et $G = \mathrm{Vect}(v_d, \ldots, v_n)$. Montrer que $S \cap F \cap G \neq \varnothing$. En déduire que $R_M(F) \geqslant \lambda_d(M)$.

d. Soient F et G des sous-espaces vectoriels tels que $F \cap G \neq \{0\}$, $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ et $C = A + B$. Montrer que $R_C(F \cap G) \leqslant R_A(F) + R_B(G)$.

e. Soient k, l et m dans $[\![1,n]\!]$ tels que $k + n = l + m$. Montrer que $\lambda_k(C) \leqslant \lambda_l(A) + \lambda_m(B)$.

f. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer : $\dfrac{|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)|}{\max\{-\lambda_1(A - B), \lambda_n(A - b)\}} \leqslant 1$, pour $k \in [\![1,n]\!]$.

12. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère : $E_{0,1} = \{f \in E \,|\, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ et $I = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

Pour $f \in E_{0,1}$, on pose $T(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $T(f)(x) = f(3x)/2$ si $x \in [0, 1/3[$, $T(f)(x) = 1/2$ si $x \in [1/3, 2/3]$ et $T(f)(x) = \dfrac{f(3x-2)+1}{2}$ si $x \in]2/3, 1]$.

a. Écrire un programme Python qui prend une fonction f de $E_{0,1}$, un réel $x \in [0,1]$ et qui retourne $T(f)(x)$. Tracer les graphes de I et de $T(I)$.

b. Montrer que T est une application de $E_{0,1}$ dans lui-même.

c. Montrer que $E_{0,1}$ est un sous-espace affine de E.

d. Montrer que T est k-lipschitzienne sur $E_{0,1}$ pour un certain $k < 1$.

e. Écrire une fonction récursive qui prend en argument un entier naturel n, une fonction $f \in E_{0,1}$ et qui retourne $T^n(f)$. Tracer le graphe de $T^5(I)$.

f. Montrer la convergence uniforme de $\big(T^n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $f \in E_{0,1}$.

13. Pour $a \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(a) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+a}$.

a. Montrer que $\big(u_n(a)\big)$ tend vers e.

b. Donner des fonctions `u(n,a)`, qui donne la valeur de $u_n(a)$, et `t(a,p,q)`, qui trace la ligne polygonale dont les sommets sont les $\big(k, u_k(a)\big)$ pour $p \leqslant k \leqslant q$. Appliquer à $a = 0,4$, $a = 0,5$ et $a = 0,49$ et conjecturer la monotonie de $\big(u_n(a)\big)$.

c. On admet que, pour $a = 0,49$, u décroît d'abord et croît ensuite. Donner une fonction qui détermine la valeur de n telle que $u_n(a)$ soit minimal.

d. Soit, pour $x > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{\ln(1+1/x)} - x$. Montrer que F est strictement croissante. Montrer que, si $a \geqslant 1/2$, u croît et que, si $a \leqslant -1 + 1/\ln 2$, u décroît.

e. Déterminer les valeurs de a telles que u soit ultimement croissante et celles pour lesquelles u est ultimement décroissante.

14. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k) \in \mathbb{R}[X]$ et $R_n = \dfrac{P'_n}{P_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{X-k}$.

a. **i.** Écrire une fonction qui calcule $R_n(x)$.

ii. Écrire une fonction qui trace $x \longmapsto R_n(x)$ sur $[-4,8]$ avec 200 points et des ordonnées dans $[-5,5]$.

b. **i.** Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que R_n admet exactement un zéro dans l'intervalle $]k, k+1[$; ce zéro est noté $a_{n,k}$.

ii. Écrire une fonction qui donne une approximation de $a_{n,k}$.

iii. On fixe k à 0 puis 10. Étudier expérimentalement le comportement de $(a_{n,k})_{n\geqslant k}$.

c. **i.** L'entier $k \in \mathbb{N}$ étant fixé, étudier la convergence de $(a_{n,k})_{n\geqslant k}$; on pourra comparer R_n et R_{n-1}.

ii. Trouver la limite puis un équivalent de $1/(a_{n,k} - k)$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $a_{n,k}$ quand n tend vers $+\infty$.

15. Soient a, b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que f décroît strictement sur $[a,c]$ et croît strictement sur $[c,b]$. On note M la solution strictement positive de $x^2+x = 1$. On définit par récurrence la suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\geqslant 0}$. Pour $n = 0$, $(a_0,b_0) = (a,b)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $l_n = b_n - a_n$, $\lambda_n = a_n + M^2 l_n$ et $\mu_n = a_n + M l_n$. Si $f(\lambda_n) \geqslant f(\mu_n)$, on pose $a_{n+1} = \lambda_n$ et $b_{n+1} = b_n$; $f(\lambda_n) < f(\mu_n)$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \mu_n$.

a. Déterminer l_n. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers c.

b. Tester l'algorithme sur la fonction sinus, puis sur une fonction affine par morceaux.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 0$ si 9 apparaît dans l'écriture décimale de n et $u_n = 1/n$ sinon. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = S_{10^{n+1}-1} - S_{10^n-1}$ et A_n l'ensemble des entiers compris entre 10^n et $10^{n+1}-1$ dont l'écriture décimale ne comprend pas de 9.

a. Écrire trois fonctions `u`, `S` et `T` qui renvoient respectivement u_n, S_n et T_n. On rappelle l'existence de la fonction `str` et de la méthode `find` des chaînes de caractères.

b. Montrer que la série de terme général u_n converge.

c. Montrer que $T_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{8}\left(\sum_{k\in A_n}\frac{1}{10k+p}\right)$.

d. En déduire $\dfrac{9}{10}T_n - \dfrac{36}{10^{n+2}}T_n \leqslant T_{n+1} \leqslant \dfrac{9}{10}T_n$.

e. Donner un encadrement de T_n en fonction de T_3 et de $q = 1 - \dfrac{4}{10^2}$.

17. On pose $g(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3/2$ et, pour $x > 1/2$: $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-1}}$.

Soit $x > 1/2$. On définit une suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_1(x) = x$ et, pour $k \geqslant 1$, $u_{k+1}(x) = g\big(u_k(x)\big)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{u_k(x)}\right)$.

a. Programmer les fonctions `f(x)` et `P(n,x)` en Python.

b. Calculer $f(\sqrt{3}) - P_n(\sqrt{3})$ pour $n \in \{1,2,3\}$.

c. Montrer que pour tout $x > 1/2$, l'équation $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)f(y)$ possède une unique solution $y = g(x)$.

d. Montrer que $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

e. Montrer que $P_n(x)$ tend vers $f(x)$.

f. Montrer : $f(x) - P_n(x) \sim \dfrac{f(x)}{u_{n+1}(x)} \sim \dfrac{1}{f(x)^2}\big(f(x) - P_{n-1}(x)\big)^3$ lorsque n tend vers $+\infty$. Commentaire ?

18. On considère $a \in \mathbb{R}$ et x_a une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}+, \mathbb{R})$ vérifiant $x_a(0) = a$ et $x_a'(t) = \cos\big(x_a(t)\big) + \cos t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

a. Utiliser la méthode d'Euler pour tracer le graphe de x_a sur $[0, T]$ pour diverses valeurs de a et de T.

b. Si $x \in E = \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$, on pose $\varphi(x) : t \longmapsto a + \sin t + \int_0^t \cos\big(x(s)\big)\,ds$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,T]$, $\big|\varphi^n(x)(t) - \varphi^n(y)(t)\big| \leqslant \dfrac{t^n}{n!}\|x - y\|_\infty$.

c. Avec les notations précédentes, soit $x \in E$. Montrer que $\big(\varphi^n(x)\big)$ converge uniformément sur tout segment vers un élément z de E, et que z vérifie les mêmes propriétés que x_a.

19. On note A l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \big\{P \in A \,|\, P(2) = n\big\}$.

a. Montrer que A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note u_n son cardinal. Calculer u_0, u_1 et u_2.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.

c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = u_k$.

d. Écrire un programme Python qui renvoie la liste des 100 premiers termes de la suite (u_n).

e. Quelle conjecture peut-on faire sur le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$? La démontrer.

20. a. On s'intéresse à la première apparition du motif 10 dans un tirage infini de pile ou face, indépendants et non truqués (pile=1 et face=0). On note A_i : "le motif 10 apparaît pour la première fois au rang i" (c'est-à-dire que le 1 est en position $i-1$ et le 0 en position i), $q_i = P(A_i)$ et T la variable aléatoire donnant le rang de première apparition du motif.

i. Écrire un programme Python calculant la moyenne du temps de première apparition. Conjecture ?

ii. Montrer que $P\left(\bigcup_{i\geqslant 2} A_i\right) = 1$.

iii. Décrire A_n, pour $n \geqslant 2$ et en déduire q_n.

iv. Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance.

b. On s'intéresse maintenant à la première apparition du motif 11. On note U la variable aléatoire donnant le rang de première apparition du motif et $r_n = P(U = n)$, $n \geqslant 2$.

i. Calculer avec Python la moyenne du temps d'apparition du motif. Conjecture ?

ii. Montrer que $r_2 = \dfrac{1}{4}$, $r_3 = \dfrac{1}{8}$ et $\forall n \geqslant 4$, $r_n = \dfrac{r_{n-1}}{2} + \dfrac{r_{n-2}}{4}$.

iii. Montrer que U est d'espérance finie et calculer son espérance.

21. a. **i.** Écrire une fonction $S(n,p)$ qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$.

ii. En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), puis $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

b. **i.** Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\exp(tx) \leqslant \dfrac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \dfrac{1}{2}(1+x)e^{t}$.

ii. On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leqslant 1$ et $E(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et que : $E\big(\exp(tX)\big) \leqslant \operatorname{ch} t \leqslant \exp(t^2/2)$.

c. **i.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrée indépendantes telles que, pour tout i, $|X_i| \leqslant a_i$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer $E\big(\exp(tS_n)\big) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

ii. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer : $P(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\varepsilon t + \dfrac{t^2}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

iii. En choisissant une bonne valeur de t, montrer : $P(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\dfrac{-\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$.

d. Commenter le résultat observé à la première question.

22. Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement, il se trouve sur la case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ème étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ qui donne la position du pion à l'instant n, $f_i = P(Y_1 = i)$ et $u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$.

a. On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

i. Écrire une fonction qui prend un paramètre entier k et qui renvoie 1 si le pion atteint la case k et 0 sinon.

ii. Écrire une fonction qui, sur une trentaine d'essais, renvoie la proportion de fois où le pion atteint la case k. Comparer à $1/E(Y_1)$.

b. On note E_k l'événement : "le pion atteint la case k" et $u_k = P(E_k)$.

i. Décrire l'événement E_k à l'aide des variable aléatoires S_n.

ii. En étudiant $P\left(E_k \cap (Y_1 = j)\right)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j$.

iii. Justifier la définition de $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ et montrer que $f(t) = \dfrac{1}{1 - u(t)}$.

iv. Calculer f dans le cas où $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$ et en déduire les u_k.

v. On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tels que $P(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $1/E(Y_1)$.