

A. CCP (Monsieur Gaspard D.)

Un texte comporte k erreurs typographiques. Pour chaque erreur, un relecteur à la probabilité p de ne pas détecter une erreur. Les détectations sont indépendantes entre elles.

1. Calculer le nombre moyen d'erreurs non détectées après une relecture.
2. **a.** Calculer le nombre moyen d'erreurs détectées dans le texte après N relectures indépendantes successives.
b. Même question lorsque les relectures sont simultanées.

Correction

1. Le nombre d'erreurs non détectées est le nombre de "succès" (succès = non détection) dans une suite de k expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Ce nombre suit donc la loi binômiale $\mathcal{B}(k, p)$, et donc son espérance vaut kp .
2. **a.** Numérotions les erreurs, et, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, notons X_i la variable qui vaut 1 si l'erreur i a été détectée à la fin des N lectures, et 0 sinon.
Les lectures étant indépendantes, on a $P(X_i = 0) = p^N$, donc $E(X_i) = P(X_i = 1) = 1 - p^N$. Le nombre d'erreurs détectées est $S = \sum_{i=1}^k X_i$, et donc $E(S) = \sum_{i=1}^k E(X_i) = k(1 - p^N)$.
b. La seule différence entre les situations est qu'en **a.**, il ne reste à la i -ème lecture que les erreurs non encore détectées, donc moins de k erreurs; alors qu'en **b.**, tous les lecteurs ont encore k erreurs dans leur texte.
Les détectations étant indépendantes, cela ne modifie pas la probabilité de détection; le nombre moyen d'erreurs détectées est donc encore $k(1 - p^N)$.

B. Petites Mines (Monsieur Alex H.)**Exercice 1**

Soit $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction g .
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$; on utilisera la formule de Stirling.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

1. Donner le théorème du rang.
Soient f et g des endomorphismes de E (que je suppose de dimension finie n).
2. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$.
3. On suppose que $g + f$ est bijectif. Montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g \geq n$.

Correction**Exercice 1**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^n/n!$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. On étudie les variations de f_n . On trouve un maximum en n ; la fonction étant positive, on en tire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| \leq a_n = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

La formule de Stirling montre que $a_n \sim 1/\sqrt{2\pi n}$, donc que a_n a pour limite 0; on a donc bien convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

3. Une récurrence simple donne $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1$ pour tout n (il vaut mieux savoir de toutes façons que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$).

4. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1$, mais $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$. On en déduit
- que la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ n'autorise pas l'interversion limite/intégrale;
 - que le théorème de convergence dominée ne peut pas s'appliquer, donc qu'il n'existe pas de fonction intégrable φ dominant la suite;
 - ...

Exercice 2

1. Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } f$ est de dimension finie, et $\text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$.
2. Si $g \circ f = 0$, alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$, donc $\text{rg } f \leq \dim \text{Ker } g = \dim E - \text{rg } g$, donc $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$.
3. Pour tout $x \in E$, $[f + g](x) = f(x) + g(x) \in (\text{Im } f + \text{Im } g)$, donc $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$. Ici, $f + g$ est en particulier surjective, donc $E = \text{Im}(f + g)$ d'où $\dim E \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.

C. Petites Mines (Mademoiselle Frédérique F.)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet au moins un point fixe. *Indication : raisonner par l'absurde.*

Correction

Si f n'admet pas de point fixe, alors $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas et est continue, donc doit garder un signe constant sur l'intervalle $[0, 1]$.

Si par exemple $f(x) - x > 0$ sur $[0, 1]$, alors, toujours grâce à la continuité, $\int_0^1 [f(x) - x] dx > 0$, donc $\int_0^1 f(x) dx > 1/2$, contradiction. Le cas négatif se traite de même.

D. TPE-EIVP (Monsieur Amine N.)**Exercice 1**

Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2xt) dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{t^2 + 1}\right)^n e^{-t} dt$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Correction**Exercice 1**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto e^{-t^2} \text{ch}(2at)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. De plus, $g(t) \sim \frac{e^{-t^2+2at}}{2}$ en $+\infty$, et cette dernière fonction est clairement négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$. Par suite, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}$ par parité.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons tout d'abord $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2xt} dt = e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2} dt$. Le changement $u = t - x$ donne alors $h(x) = e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = e^{x^2} \sqrt{\pi}$ (la valeur $\sqrt{\pi}$ n'a pas ici une importance énorme, ce qui compte est que l'intégrale ne dépende pas de x).

D'autre part, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2xt} dt = h(-x)$. Par linéarité, on a donc $f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} = e^{x^2} \sqrt{\pi}$.

Exercice 2

Posons $I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{t^2 + 1}\right)^n dt$. On a alors, pour tout n : $0 \leq e^{-1} I_n \leq a_n \leq I_n$. Les séries entières $\sum e^{-1} I_n z^n$ et $\sum I_n z^n$ ont même rayon de convergence R : la série $\sum a_n z^n$ a donc ce même R pour rayon de convergence.

Classiquement, on a, pour tout t , $2t \leq 1 + t^2$ d'où immédiatement $I_n \leq (1/2)^n$. Le rayon de convergence de $\sum (1/2)^n z^n$ est évidemment 2, donc $R \geq 2$.

Soient enfin $z \in]2, +\infty[$ et $a \in]1, z/2[$. On a $\frac{tz}{1+t^2} = \frac{z}{2} > a$ pour $t = 1/2$, et donc, par continuité, il existe $\beta > 0$ tel que $\frac{tz}{1+t^2} > a$ pour tout $t \in [1/2 - \beta, 1/2 + \beta]$.

On en déduit $I_n z^n = \int_0^1 \left(\frac{tz}{t^2+1}\right)^n dt \geq \int_{1/2-\beta}^{1/2+\beta} \left(\frac{tz}{t^2+1}\right)^n dt \geq 2\beta a^n$ et donc, puisque $a > 1$, $I_n z^n$ tend vers $+\infty$, donc $\sum I_n z^n$ diverge. Par suite, $R \leq 2$, donc finalement $R = 2$.

E. TPE-EIVP (Monsieur Amine N.)

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires (*indépendantes, je suppose*) suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres λ et μ respectivement.

Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang 1.

1. Montrer que $A^2 = (\text{tr } A)A$.
2. Déterminer $\exp A$; on distinguera les cas $\text{tr } A = 0$ et $\text{tr } A \neq 0$.
3. Soient A et B deux matrices de rang 1. Les matrices $\exp A$ et $\exp B$ commutent-elles?

Correction

Exercice 1

Vu en cours : on utilise les fonctions génératrices, et le fait que la série génératrice d'une somme de deux variables *indépendantes* est le produit des deux séries génératrices. On trouve que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2

1. Le plus simple est de passer par les endomorphismes. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique. Puisque $\text{rg } f = \text{rg } A = 1$, on a $\dim \text{Ker } f = n - 1$; on choisit alors une base $(u_1, \dots, u_{n-1})$ de $\text{Ker } f$, que l'on complète en une base de $\mathbb{C}^n$ à l'aide d'un vecteur u_n .

Dans cette base, la matrice de f est de la forme $B = \begin{pmatrix} & x_1 \\ & \vdots \\ 0 & \\ & x_n \end{pmatrix}$. On vérifie alors immédiatement que $B^2 = x_n B = (\text{tr } B)B$, d'où $f^2 = (\text{tr } f)f$, d'où $A^2 = (\text{tr } A)A$.

2. Si $\text{tr } A = 0$, alors $A^2 = 0$, et donc $A^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Par suite, $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A$.

Sinon, en multipliant par A^{k-1} la relation du 1, on obtient $A^{k+1} = (\text{tr } A)A^k$ pour tout $k \geq 1$; et donc $A^k = (\text{tr } A)^{k-1}A$ pour tout $k \geq 1$. On en tire

$$\exp A = I_n + \left(\frac{1}{\text{tr } A} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\text{tr } A)^k}{k!} \right) A = I_n + \frac{e^{\text{tr } A} - 1}{\text{tr } A} A$$

On peut noter que l'expression dans le cas $\text{tr } A = 0$ est la limite quand $\text{tr } A$ tend vers 0 de l'expression générale.

3. Je ne suis pas sûr que ce soit bien la question posée. En développant le produit, il est clair que $\exp A$ et $\exp B$ commutent si et seulement si A et B commutent.