Algèbre générale

1. **a.** Énoncer le petit théorème de Fermat.

b. Montrer qu'il existe une infinité de multiples de 13 de la forme $2^n - 3$.

c. Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pq divise $n^{pq} - n^p - n^q + n$.

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad k_n = \dfrac{n^{31}}{31} + \dfrac{n^{29}}{29} + \dfrac{839n}{899}$ est un entier naturel.

e. Montrer que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1\ [pq]$.

2. (*IMT*) Résoudre $\quad x^2 + x + \overline{1} = \overline{0} \quad$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

3. Soit $(A, +, .)$ un anneau ; on note 1 le neutre de la multiplication. Soient a et b dans A tels que $1 - ab$ soit inversible. Montrer que $1 - ba$ est inversible, et préciser son inverse.

4. (*TPE*) Soit $P = X^3 - X + 1$.

a. Montrer que P a trois racines distinctes a, b et c dans $\mathbb{C}$.

b. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $a^7 + b^7 + c^7$.

5. (*IMT*) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$ a-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

Algèbre linéaire élémentaire

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme P, associent respectivement $P(X+1)$ et $P(X-1)$.
Déterminer, en fonction de $k \in \mathbb{R}$, le rang de $u + kv$.

7. Résoudre le système $\begin{cases} ax + (b-1)y + 2z = 1 \\ ax + (2b-3)y + 2z = 2 \\ ax + (b-1)y + bz = 2b-3 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, en discutant suivant les valeurs des paramètres complexes a et b.

8. (*IMT*) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $a_{ij} \geqslant 0$ pour tout (i, j), et $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leqslant 1$ pour tout i. Montrer que $\det A \leqslant 1$.

9. (*IMT*) Pour $n \geqslant 1$, soit $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 9 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}$. Montrer : $\quad \forall n \geqslant 1 \quad D_n = (n+1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

10. (*IMT*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice p.

a. Soit $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^k(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^k(x)\big)$ est libre.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}\big(\exp(u) - \mathrm{Id}_E\big)$.

Réduction des endomorphismes

11. Soient $a \in \mathbb{C}$, et $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Déterminer un réel $M > 0$ tel que, pour tout a tel que $|a| < M$, la suite (A^n) tende vers 0.

12. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls, et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

a. Quel est le rang de A ?

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

On revient au cas général ; on pose $B = 2A - (\operatorname{tr} A)I_n$.

c. Calculer le déterminant de B. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

d. Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$.

a. Calculer $\det A$; qu'en déduit-on sur le spectre de A ?

b. Montrer que, si $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors k n'est pas valeur propre de A.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$.

d. Montrer que A admet n valeurs propres réelles distinctes.

14. a. Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

15. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - \mathrm{Id}_E = 0$.

a. Montrer que u est inversible et déterminer u^{-1}.

b. $u - \mathrm{Id}_E$ est-il inversible ?

c. u est-il diagonalisable ?

16. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ non nul vérifiant $f^3 + f = 0$.

a. Montrer que f n'est pas surjective.

b. Montrer que f n'est pas diagonalisable, et que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} f$. Montrer que $\big(f(x), f^2(x)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

d. Calculer $\operatorname{tr} f$.

17. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

a. Quel est le polynôme caractéristique de A ?

b. Démontrer que $A^n = 0$.

c. Prouver que $\det(A + I_n) = 1$.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et commutant avec A.

i. Que dire de AM^{-1} ?

ii. Montrer que $\det(A + M) = \det M$.

iii. Cette égalité reste-t-elle vraie pour toutes les matrices inversibles ?

iv. Cette égalité reste-t-elle vraie pour toutes les matrices commutant avec A ?

19. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E, et $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifiant $f \circ g = g \circ f + \lambda f$.

a. On suppose ici $\lambda = 0$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

b. On suppose désormais $\lambda \neq 0$. Soit x un vecteur propre de g, associé à une valeur propre μ. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $g\big(f^k(x)\big)$ en fonction de λ, μ et $f^k(x)$.

c. En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

Espaces euclidiens

20. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\quad (A|B) = {}^tAB$.

a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On note $\|\ \|$ la norme associée ; montrer que $\quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad |\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\|A\|$.

c. Soit $G = \{\lambda I_n \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des matrices scalaires. Déterminer $G^\perp$; pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner une expression de la distance $d(M,G)$.

21. On admet que $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \longmapsto (A|B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que l'espace $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'espace $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$.

c. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

i. Montrer que H est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

ii. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer la distance de J à H.

22. Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Si $(f,g) \in E^2$, on pose $\quad (f|g) = \int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\,dt$.

a. Montrer que l'on définit ains un produit scalaire sur E.

b. Soit $U = \{f \in E \,|\, f(0) = f(1) = 0\}$ et $V = \{f \in E \,|\, f'' = f\}$. Montrer que U et V sont deux sous-espaces de E, orthogonaux pour le produit scalaire précédent.

c. A-t-on $E = U \oplus V$?

23. Soit E un espace euclidien ; soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E, on pose $\quad \varphi(\ell_1, \ell_2) = \sum_{k=1}^n \ell_1(e_k)\ell_2(e_k)$.

a. Montrer que φ est un produit scalaire sur l'espace E^* des formes linéaires sur E.

b. Montrer que φ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

24. Soit E un espace euclidien, muni de deux bases orthonormées $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs.

a. Montrer que $\det_e(x_1, \dots, x_n) = \det_e(y) \det_y(x_1, \dots, x_n)$.

b. Montrer que $|\det_e(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^n \|x_k\|$; dans le cas $(x_1, \dots, x_n)$ libre, on pourra penser au procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

c. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on pose $N_\infty(M) = \max\{|m_{ij}| ; (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$.

Montrer que $|\det M|^{1/n} \leqslant \sqrt{n} N_\infty(M)$.

25. On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des colonnes du produit scalaire $(X,Y) \longmapsto (X|Y) = {}^tXY$.

a. Soit V une colonne unitaire. On lui associe la matrice carrée $H_V = I_n - 2V{}^tV$.

Montrer que H_V est une matrice orthogonale ; décrire géométriquement l'endomorphisme associé.

b. Soient X et Y deux colonnes distinctes et de même norme. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont orthogonaux.

c. Montrer qu'il existe une colonne unitaire V telle que $H_V X = Y$.

26. Soit E un espace euclidien. Soient a et b deux vecteurs unitaires et indépendants de E. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = (a|x)b + (b|x)a$.

a. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

b. Déterminer le noyau de f.

c. Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de f.

27. Soit E un espace euclidien de dimension $2n$. Soient F et G deux sous-espaces de dimension n de E, tels que $E = F \oplus G$; on note p (respectivement q) la projection sur F de direction G (respectivement sur G de direction F).

Soit φ une isométrie vectorielle de E, telle que $\varphi(F) \subset G$. On pose $\quad f(x) = \varphi\big(p(x)\big) + \varphi^{-1}\big(q(x)\big) \quad$ pour tout $x \in E$.

a. Montrer que $\varphi(F) = G$. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, $f(F) = G$ et $f(G) = F$.

b. On suppose que $\forall (x,y) \in F^2 \quad \big(\varphi(x) \,|\, y\big) = \big(x \,|\, \varphi(y)\big)$. Montrer que f est une isométrie.

c. Établir la réciproque du résultat prouvé en **b**.

28. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une colonne non nulle. On pose $B = A^tA$.

a. Montrer que B est diagonalisable.

b. Déterminer le rang de B. Calculer B^2.

c. Donner les éléments propres de B ; puis exprimer $\det(I_n + B)$ en fonction de $\operatorname{tr} B$.

29. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = M^tM$ et $M^2 = -4I_n$.

a. Montrer que ${}^tMM$ est diagonalisable.

b. Montrer que ${}^tMM$ ne peut avoir que 4 et -4 comme valeurs propres ; puis que seule 4 convient.

c. Montrer que $M/2$ est orthogonale. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions posées ?

30. a. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $X\,{}^tXX = I_n$. Montrer que X est inversible, puis qu'elle est symétrique, puis que $X = I_n$.

b. Soient A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t(AB) = B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Espaces vectoriels normés

31. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$. On considère la partie $A = \big\{f \in E \,\big|\, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 1\big\}$.

a. Montrer que A est un fermé de E (on pourra utiliser des suites).

b. Soit $f \in A$; montrer que $\|f\|_\infty > 1$.

c. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_n \in \,]0,1[$; soit f_n une fonction de E vérifiant $f_n(0) = 0$, f_n est affine sur $[0,\alpha_n]$ et f_n est constante égale à $1 + 1/n$ sur $[\alpha, 1]$.
Montrer que l'on peut choisir α_n de manière à avoir $f_n \in A$. En déduire la valeur de la distance $d(0,A)$ de la fonction nulle à la partie A. Cette distance est-elle atteinte ?

32. (*IMT*) Soient $E = \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, $O = \big\{f \in E \,|\, f(1) > 0\big\}$ et $F = \big\{f \in E \,|\, \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant 0\big\}$.

a. Montrer que O est un ouvert pour la norme $\|\ \|_\infty$.

b. Montrer que F est un fermé pour la norme $\|\ \|_\infty$, puis pour la norme $\|\ \|_1$.

c. L'ensemble O est-il ouvert pour la norme $\|\ \|_1$?

Suites et séries numériques

33. Soit (z_n) une suite complexe, telle que les séries $\sum z_n$ et $\sum z_n^2$ converge, et que $\mathcal{R}e(z_n) \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

a. Montrer que $\sum \mathcal{R}e(z_n)^2$ converge, puis que $\sum |z_n|^2$ converge.

b. Montrer, à l'aide d'un exemple, que $\sum |z_n|$ peut ne pas converger.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $z_n = \dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que (z_n) vérifie les deux premières hypothèses, mais que $\sum |z_n|^2$ diverge.

34. a. Montrer que la série $\sum \sin\big(\pi(2-\sqrt{3})^n\big)$ converge.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi(2-\sqrt{3})^n + \pi(2+\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$.

c. Étudier la convergence de la série $\sum \sin\big(\pi(2+\sqrt{3})^n\big)$.

35. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad u_n = \dfrac{1}{3^n n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k-2) \quad$ et $\quad v_n = n^{-3/4}$.

a. Montrer que, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. En étudiant $\dfrac{u_n}{v_n}$, en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum \left[\frac{2}{3}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big)\right]$ converge. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim Cn^{-2/3}$.

36. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

a. Montrer que u_n a un signe constant à partir d'un certain rang.

b. Montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right)$ converge ; en déduire que la suite $(n^\alpha u_n)$ a une limite finie non nulle.

c. Étudier la convergence de la suite de terme général $v_n = \dfrac{n^n}{n!e^n}$.

37. (*IMT*) Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos u_{n-1}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

38. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a. Soit (a_n) une suite réelle, convergente de limite ℓ ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $b_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Montrer que (b_n) converge vers ℓ.

b. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déterminer la limite de (v_n).

d. Déterminer un équivalent de u_n. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

39. Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.

a. Montrer que $\sum v_n$ converge.

b. En déduire que la suite (nu_n) converge et déterminer sa limite. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Intégration

40. Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $u(f)$ la fonction $u(f) : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

a. Montrer que u est une application linéaire.

b. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $g = u(f)$. Montrer que g est de classe C^1, et déterminer g'.
L'application u est-elle surjective ? injective ?

c. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que $u(f)$ tend vers ℓ en $+\infty$.
La réciproque est-elle vraie ?

41. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Généraliser à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$.

42. **a.** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1}\,dt$ converge.

b. Soit $n \geqslant 1$; on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{t\left|\sin t\right|}{t^2+1}\,dt$. Montrer que $J_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{(t+k\pi)\sin t}{(t+k\pi)^2+1}\,dt$.

c. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

43. **a.** Déterminer le domaine de définition D de $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t\,dt}{t^2+x^2}$.

b. Calculer $F(1)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$.

c. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in D$.

44. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que les fonctions $t \longmapsto f'(t)^2$ et $t \longmapsto t^2 f(t)^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $t \longmapsto tf(t)f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+\quad xf(x)^2 = \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,dt + 2\int_0^x tf(t)f'(t)\,dt$.

c. Montrer que $xf(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d. Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et que

$$\Big(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt\Big)^2 \leqslant 4\Big(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,dt\Big)\Big(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt\Big)$$

Intégrales dépendant d'un paramètre

45. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^1 \ln t \ln(1-t^n)\,dt$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

46. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \int_1^{+\infty} n\exp(-t^n)\,dt$.

b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

47. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

b. Déterminer la limite de la suite (I_n).

c. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}I_n$; donner une expression de sa somme sous forme intégrale.

48. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n} t\,dt$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.

c. Étudier la convergence de la suite (I_n).

49. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,dt$.

a. Montrer la convergence de la suite (I_n) et préciser sa limite ; étudier la convergence de la série $\sum(-1)^n I_n$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$.

c. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

50. Soient L l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge absolument ; et E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{t+x}$ converge absolument. Si $f \in E$, on pose $F : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{t+x}$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel qui contient strictement L.

b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; soit $f : t \longmapsto t^\alpha$. Pour quelles valeurs de α, f appartient-elle à E ? Dans ce cas, montrer que F est proportionnelle à f.

c. Soit $f \in L$. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, si cette dernière intégrale n'est pas nulle.

51. **a.** Montrer que $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression de F'. En déduire une expression de F.

52. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

a. Donner le domaine de définition de F.

b. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de F' sous forme intégrale.

d. On admet que l'on montrerait de même que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. Donner l'expression de F'' sous forme d'une intégrale, et vérifier que $F''(x) + F(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Suites et séries de fonctions

53. (*IMT*) Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$.

54. Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

55. a. Déterminer le domaine de définition de $S : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{\mathrm{ch}(nt)}$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Est-elle continue en 0 ?

56. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{(-1)^n \exp(-nx)}{n+1}$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, puis que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

b. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. En utilisant la fonction $T : x \longmapsto -e^{-x}S(x)$, donner une expression simple de S.

57. (*IMT*) Soit $f : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent simple de $f(t)$ en $+\infty$.

58. a. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$ est bien définie.

b. Montrer que $\forall x \in]0,1[\quad \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$.

c. Exprimer I comme la somme d'une série.

d. Déterminer a et b tels que $\dfrac{1}{(2n+1)(n+1)} = \dfrac{a}{2n+1} + \dfrac{b}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose : $H_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n+1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $H_p = \ln(p+1) + c + o(1)$ quand p tend vers $+\infty$.

f. Exprimer pour tout p, $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$ à l'aide de la suite (H_p).

g. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$ et en déduire la valeur de I.

59. Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

a. Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$.

b. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.

c. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.

d. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,+\infty[$.

60. a. Montrer que, pour tout $a \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{t+\ln(1-t)}{t^2}\,dt$ converge.

b. Soit $a \in]0,1[$; montrer que $\displaystyle\int_0^a \frac{t+\ln(1-t)}{t^2}\,dt = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n}{n(n+1)}$.

c. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+\ln(1-t)}{t^2}\,dt$ converge, et calculer sa valeur.

Séries entières

61. On définit la suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $1 \leqslant u_n \leqslant 2^n$ pour tout n. En déduire un encadrement du rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n z^n$.

b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$. Montrer que $\forall z \in D(0,R) \quad f(z) = 1 + zf(z) + z^2 f(z)$.

c. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$ et $\forall z \in D(0,R) \quad f(z) = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha z} - \dfrac{\beta}{1+\beta z}\right)$. En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

62. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big[\ln(1+x)\big]^n \, dx$.

a. Étudier les variations de la suite (I_n), et montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln 2)^n$ pour tout n. Qu'en déduit-on ?

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = (\ln 2)^{n+1} - (n+1) I_n$.

c. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{I_n}{n!}$ converge, et calculer sa somme.

d. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{I_n t^n}{n!}$ et calculer sa somme.

63. (*IMT*) On note C l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que la série $\sum a_n$ converge ; on note S l'ensemble des suites réelles $a = (a_n)$ telles que la fonction $f_a : t \longmapsto \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ soit définie au moins sur $]-1, 1[$, et ait une limite finie ℓ_a en 1^-.

a. Montrer que la suite $\big((-1)^n\big)$ est dans S, mais pas dans C.

Dans toute la suite, $a = (a_n)$ est une suite à termes positifs.

b. On suppose que $a \in C$; montrer que $a \in S$.

c. On suppose que $a \in S$. Montrer que $\forall t \in [0, 1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} a_n t^n \leqslant f_a(t) \leqslant \ell_a$. En déduire que $a \in C$.

64. On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

a. Montrer que (E) admet une et une seule solution y_0 développable en série entière au voisinage de 0, et vérifiant $y_0(0) = 1$; on déterminera les coefficients de son développement.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t \, dt = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$.

c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \pi y_0(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) \, dt$.

Équations différentielles

65. Soit (E) l'équation différentielle $t^2 y'' + 4ty' + (2 - t^2)y = 1$.

a. À l'aide du changement de fonction inconnue $z = t^2 y$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

b. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$.

66. (*TPE*)

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$.

b. Soit (a_n) une suite réelle, telle que $\sum |a_n|$ converge. Résoudre $y'' + y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.

67. Résoudre le système différentiel $(S) : \begin{cases} x' = -x - 4y + 4e^t \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

68. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 ; en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$; en déduire les solutions du système différentiel $(\Sigma) : X' = AX$.

c. Proposer un système fondamental de solutions de (Σ). Déterminer la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fonctions de plusieurs variables

69. Soit $f : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$.

a. Montrer que f est de classe C^1 sur U, et déterminer ses points critiques. La fonction f a-t-elle un extremum global ?

b. Déterminer la différentielle en $(1, 1)$ de f.
Déterminer la différentielle en $(1, 1)$ de $g : (x, y) \longmapsto \big(f(x, y), f(x, y)\big)$.

70. a. Soient $f : (x, y) \longmapsto xy(1 - x - y)$ et $T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\big\}$.
Prouver l'existence d'un maximum global de f sur T. Déterminer les extremums globaux de f sur T.

b. Soit ABC un triangle du plan, d'aire 1. Comment placer le point M à l'intérieur du triangle ABC, pour que le produit des distances aux trois côtés soit maximal ? On pourra faire intervenir les aires des triangles AMB, BMC et CMA.

71. Soit E un espace euclidien ; soient $b \in E$, et u un endomorphisme symétrique de E, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \big(u(x) \,|\, x\big) - (b \,|\, x)$.

a. Soit $x \in E$. Montrer que f est différentiable en x, et que $df_x(h) = \big(2u(x) - b \,|\, h\big)$ pour tout $h \in E$.
Déterminer le gradient de f en x ; montrer que f est de classe C^1 sur E.

b. Montrer que f n'est pas majorée sur E, mais admet un minimum global en un point x_0 que l'on précisera.

Probabilités

72. On range les nombres de 1 à 9 au hasard dans un tableau 3×3 ; on veut calculer la probabilité que la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ ainsi formée ait un déterminant impair.

a. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Soit B la matrice obtenue à partir de A en remplaçant chaque coefficient par son reste dans la division par 2. Montrer que $\det A$ et $\det B$ ont même parité.

b. Soit Δ l'ensemble des matrices de déterminant impair parmi les matrices formées. Soit Ω l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de déterminant impair, ayant quatre coefficients nuls et les cinq autres égaux à 1.
Déterminer une relation entre $\operatorname{Card} \Delta$ et $\operatorname{Card} \Omega$.

c. Trouver le cardinal de l'ensemble K_1 des matrices de Ω ayant deux colonnes contenant chacune deux 0 ; et le cardinal de l'ensemble K_2 des matrices de Ω ayant deux colonnes contenant exactement un 0.

d. Trouver le cardinal de Ω ; en déduire la probabilité cherchée.

73. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \big\{k \in [\![1, n]\!] \;\big|\; k|n\big\}$ et $f(n) = \operatorname{Card}(D_n)$.

a. Soient p un nombre premier et $q \in \mathbb{N}^*$. Calculer $f(p^q)$.

b. Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux. Montrer que $f(mn) = f(m)f(n)$.
Si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{q_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de n, en déduire une expression de $f(n)$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on munit $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. Soit $d \in D_n$, et $A_d = \big\{k \in [\![1, n]\!] \;\big|\; d|k\big\}$.
Calculer $P(A_d)$, puis $P(E_n|A_d)$.

74. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

a. **i.** Calculer $P(Y = X)$.

ii. En déduire $P(Y \leqslant X)$.

iii. Montrer que $P(Y \leqslant X) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Donner la loi de probabilité de $X + Y$.

c. **i.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > n)$.

ii. En déduire $P(Z > X + Y)$.

75. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = \dfrac{i + j}{2e^2 i! j!}$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

a. Déterminer la loi de X ; calculer l'espérance de $\dfrac{1}{1+X}$.

b. Montrer sans calcul que Y suit la même loi que X ; X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Déterminer la loi de $Z = X + Y - 1$.

76. Deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivent respectivement les lois binômiales $\mathcal{B}(n_1, p_1)$ et $\mathcal{B}(n_2, p_2)$.

a. À quelle condition, la variable $X_1 + X_2$ suit-elle aussi une loi binômiale ?

b. À quelle condition, les variables $X_1 + X_2$ et $n_1 - X_1 + X_2$ suivent-elles toutes deux des lois binômiales ?

77. Le nombre N de clients qui se présentent à une banque chaque jour suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client, indépendamment des autres, peut soit déposer de l'argent avec une probabilité p, soit en retirer avec une probabilité $q = 1 - p$. On note D (respectivement R) le nombre total de clients ayant déposé (respectivement retiré) de l'argent un jour donné.

a. Montrer que D suit une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre λ_D.

b. En déduire, sans calculs, que R suit une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre λ_R.

c. Montrer que D et R sont indépendantes.

78. Soient X et Y deux lois indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = X/Y$.

a. Montrer que $Z(\Omega) \subset \mathbb{Q}_+^*$. Si le nombre $r \in \mathbb{Q}_+^*$ s'écrit $r = a/b$ sous forme irréductible, montrer que $P(Z = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka, Y = kb)$. Calculer $P(Z = r)$.

b. Montrer que $E(Z) = E(X).E(1/Y)$; calculer $E(Z)$.

c. Montrer que $E(Z) > 1$. Commenter.

79. Soient X et Y deux lois indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

a. Déterminer la loi de $T = \min\{X, Y\}$. En déduire l'espérance de $1/T$.

b. Calculer la loi de $Z = |X - Y|$, et déterminer son espérance.

c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $P\big((T = k) \text{ et } (Z = n)\big)$; en déduire que Z et T sont indépendantes. Calculer l'espérance de Z/T.

80. Le nombre de participants à un jeu est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Chacun son tour, chaque participant joue et a la possibilité de gagner un lot avec une probabilité p. Soit Y le nombre de lots que l'organisateur va devoir distribuer.

a. **i.** Si l'on connaît le nombre n de participants, quelle loi suit Y ?

ii. On fait l'hypothèse qu'il y a 100 participants et que chacun d'eux a une chance sur 20 de gagner un lot. Trouver une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait au plus un lot à distribuer (on utilisera $e^{-5} \simeq 0,0067$).

b. On revient au cas général. Trouver $P(X = n, Y = k)$ pour $k \leqslant n$ puis pour $k > n$.

c. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(Y = k)$. Quelle loi suit Y ? Donner son espérance et sa variance.

81. **a.** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$. Pour tout $t \in]-R, R[$, calculer $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$.

b. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet pour fonction génératrice $G_X = \lambda S$, où $\lambda > 0$. Déterminer λ, puis $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Indications

1. b. Il suffit d'en trouver un. **c.** Il suffit de montrer que c'est un multiple de p et de q. **d.** $899 = 29 \times 31$ et $839 = 29 \times 31 - 29 - 31$. **e.** Examiner la classe modulo p et celle modulo q.
2. On a $n \equiv 0\ [21] \iff n \equiv 0\ [7]$ et $n \equiv 0\ [3]$.
3. On connaît c tel que $c = cab$, et on cherche d tel que $d = dba$.
4. b. Pour $a^2 + b^2 + c^2$, développer $(a + b + c)^2$ et utiliser les relations entre coefficients et racines. Pour $a^7 + b^7 + c^7$, commencer par effectuer la division euclidienne de X^7 par P.
6. Étudier les images des polynômes X^p.
7. Le système se met immédiatement sous forme triangulaire ; commencer par discuter sur b.
8. Procéder par récurrence sur n.
9. Développer par rapport à la dernière colonne pour obtenir une relation de récurrence vérifiée par (D_n).
10. b. Noter que $\exp(u)$ est ici une somme finie. Si $x \in \operatorname{Ker}\big(\exp(u) - \mathrm{Id}_E\big)$ est non nul, utiliser le **a.** pour montrer que $x \in \operatorname{Ker} u$.
11. a. Si χ_A n'a que des racines simples, alors A est diagonalisable. **b.** Il suffit que A soit diagonalisable, et que toutes ses valeurs propres aient un module strictement inférieur à 1.
12. c. Commencer par soustraire une colonne à toutes les autres ; on peut aussi remplacer B par une matrice semblable simple.
13. c. Résoudre le système $AX = \lambda X$, en commençant par exprimer les x_k en fonction de $S = \sum x_i$ et de λ.
14. Puisque A est à coefficients réels, que peut-on dire des racines non réelles de χ_A ?
15. b. Si oui, χ_u a $2n + 1$ racines non réelles...
16. a. Déduire de $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ que f a au moins une valeur propre. **b.** Quelles sont les valeurs propres possibles de f ? Pour la somme directe, étudier l'intersection. **c.** Avec le **a**, il suffit de prouver que la famille est libre.
17. Une fois trouvée une base de l'espace propre, il suffit de trouver un vecteur indépendant de cette base.
18. c. C'est $\chi_A(1)$. **d.iii** Chercher un contre-exemple en dimension 2. **d.iv** Penser à la démonstration de la densité des inversibles.
19. c. Si $f^k(x) \neq 0_E$ pour tout k, alors g a une infinité de valeurs propres. Considérer le plus grand k tel que $f^k(x) \neq 0$.
20. b. Penser à Cauchy-Schwarz. **c.** Décomposer M suivant G et $G^\perp$.
21. c.i. La trace est une forme linéaire. **c.ii.** $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr}({}^tI_nM)$.
22. c. Pour $f \in E$, il faut trouver $h \in V$ vérifiant $h(0) = f(0)$ et $h(1) = f(1)$.
23. b. Si ℓ est une forme linéaire sur E, il existe un vecteur a tel que $\ell(x) = (a|x)$ pour tout x.
24. a. Faut-il refaire le cours sur les déterminants, ou utiliser simplement les formules de changements de base ? **b.** La matrice de passage de la base x à son orthogonalisée est triangulaire.
25. a. Chercher les vecteurs invariants. **c.** Le vecteur $X - Y$ doit être orthogonal à l'hyperplan par rapport auquel on fait une symétrie.
26. c. Les vecteurs propres qui restent à trouver doivent être dans $\operatorname{Vect}(a, b)$; penser à exploiter les symétries du problème.
27. a. Noter que φ est un isomorphisme, et que $\varphi^{-1}(G) = F$. **b.** Développer $\|f(x)\|^2$, en notant que $\varphi^{-1}(q(x)) \in F$. **c.** Si $(x, y) \in F^2$, reprendre le calcul du **b.** appliqué à $\|f(x + \varphi(y))\|$.
28. b. Pour B^2, noter que ${}^tAA$ est un réel.
29. b. Calculer $({}^tMM)^2$; pour éliminer -4, considérer ${}^tX{}^tMMX$ où X est une colonne propre.
30. a. Pour symétrique : $X^{-1} = {}^tXX$.
31. a. Noter que "f_n tend vers f" signifie ici "la suite (f_n) converge vers f uniformément sur $[0, 1]$". **c.** La distance cherchée est en fait la borne inférieure des $\|f\|_\infty$ quand f décrit A.
32. a. et **b.** Dans chaque cas, utiliser l'image réciproque d'un ouvert ou fermé par une application continue ; il faut donc vérifier la continuité par rapport à la norme donnée. **c.** En prenant par exemple f constante et $\varepsilon > 0$ quelconque, construire g telle que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ et $g(1) = 0$.
33. a. Décomposer z_n sous la forme $x_n + iy_n$. **b.** Prendre une suite pour laquelle la série des parties imaginaires ne converge pas absolument.
34. b. La suite étudiée vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2.
35. a. Faire un développement asymptotique des deux rapports. **b.** Les sommes partielles de la série se calculent facilement.
36. b. Pour la série, montrer que le terme général est un $O(1/n^2)$; pour la suite, la série est télescopique.
37. Déterminer un équivalent de u_n, puis un développement asymptotique à 2 termes.
38. a. Utiliser la sommation des comparaisons. **d.** Appliquer le **a** à (v_n).

39. a. Calculer et majorer les sommes partielles. **b.** Si la limite est non nulle, alors u_n équivaut à...
40. b. $\operatorname{Ker} f$ est constitué des fonctions 1-périodiques de valeur moyenne nulle. **c.** Pour le sens direct, utiliser les ε ; pour la réciproque, prendre une fonction non nulle du noyau.
41. Encadrer par des intégrales, ou penser aux sommes de Riemann.
42. a. Intégrer par parties, en primitivant $\sin t$. **c.** Minorer chaque intégrale apparaissant dans la somme du **b**.
43. c. Poser $t = |x|u$.
44. c. Note que $xf(x)^2$ a une limite finie en $+\infty$ d'après **b** ; obtenir une contradiction si cette limite est non nulle. **d.** Utiliser Cauchy-Schwarz pour les intégrales.
45. b. Attention aux signes : peut-on majorer $|\ln(1-t^n)|$ par $|\ln(1-t)|$?
46. b. Commencer par le bon changement de variable dans I_n.
47. c. Pour obtenir la limite, on peut par exemple appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles, en majorant grâce au TSSA.
48. b. Effectuer deux intégrations par parties.
49. b. Écrire $\tan^{n+2} = (1+\tan^2)\tan^n - \tan^n$. **c.** Utiliser **b** et la décroissance de I_n pour encadrer I_n.
50. a. Pour le "strict", chercher une fonction puissance. **b.** Pour F, poser $t = xu$. **c.** Convergence dominée pour $xF(x)$.
51. b. Appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale en dominant sur les segments inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
52. c. Dominer sur les segments.
53. C'est une équation du second degré en e^{iz}.
54. b. Étudier les variations de u_n et chercher un équivalent de $\|u_n\|_\infty$.
55. c. Majorer $1/\operatorname{ch}(nt)$ par $2e^{-nt}$.
56. a. Pour la convergence uniforme : TSSA. **c.** Dériver T.
57. c. L'équivalent est le premier terme ; montrer que $e^t f(t)$ a pour limite 1 en $+\infty$.
58. f. Exprimer $\sum 1/(2n+1)$ en fonction de H_{2p+1} et de H_p.
59. a. Comparer à une intégrale. **c.** Étudier les variations de f_n. **d.** Majorer le reste en majorant $1/\ln k$ par $1/\ln n$ pour $k \geqslant n$.
60. b. Écrire la fonction intégrée comme somme d'une série entière. **c.** Il s'agit d'intervertir limite en 1 et somme.
62. b. Intégrer par parties, en choisissant bien la primitive. **c.** Diviser la relation du **b** par $(n+1)!$ et sommer.
63. b. On a convergence normale de la série entière sur $[0,1]$. **c.** Pour $f_a(t) \leqslant \ell_a$, noter que f_a est croissante sur $[0,1[$. Pour $a \in C$, majorer les sommes partielles de $\sum a_n$.
65. b. Une seule solution peut être prolongée par continuité en 0 ; montrer qu'elle est de classe C^2 en vérifiant qu'elle est la somme d'une série entière.
66. a. Résoudre $y'' + y = e^{int}$; attention au cas $n = 1$. **b.** Justifier que l'on peut superposer les solutions.
70. b. On veut en fait maximiser le produit des trois aires, connaissant leur somme.
71. a. Développer $f(x+h) - f(x)$, en tenant compte de la symétrie de u. **b.** Pour non majorée, regarder l'image des vecteurs propres. Le minimum est au seul point critique, reprendre $f(x+h) - f(x)$ en ce point.
72. b. L'application f définie en **a** transforme Δ en Ω, et les éléments de Ω ont tous le même nombre d'antécédents. **c.** Pour K_1, discuter suivant que les deux 1 dans les deux colonnes spécifiées sont ou non sur la même ligne.
73. b. Pour $f(mn)$, montrer que les diviseurs de mn sont exactement les ab, où $a|m$ et $b|n$.
74. a.ii. Par symétrie, $P(X < Y) = P(Y < X)$.
76. a. Utiliser la fonction génératrice. **b.** La variable $n_1 - X$ suit une loi binômiale.
77. a. Commencer par calculer les probabilités conditionnelles $P(D = k | N = n)$. **c.** Pour calculer $P((D = d)$ et $(R = r))$, reprendre la méthode du **a**.
78.
79. a. Commencer par calculer $P(T \geqslant k)$. **b.** Attention au cas $Z = 0$.
81. a. Pour le calcul de S, écrire $n^2 + n = n(n-1) + 2n$. **b.** Que vaut $G_X(1)$?