Oral 2016 – Mines et Centrale sans Python

1. (*Centrale*) Soit $(G, *)$ un groupe fini de cardinal n ; soit S une partie non vide de G. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A(k)$ l'ensemble $A(k) = \{s_1 * s_2 * \cdots * s_k\ ;\ (s_1, \ldots, s_k) \in S^k\}$ et on pose $a_k = |A(k)|$ (cardinal de $A(k)$).

a. Montrer que la suite (a_k) est croissante.

b. Montrer que $\forall k \geqslant n \quad a_{k+1} = a_k$.

c. Montrer que $A(n)$ est un sous-groupe de G.

2. (*Mines*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.

3. (*Centrale*) Soit H l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.

a. Représenter H.

b. Montrer qu'il existe une unique matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $A(H) \subset H$.

c. Montrer que $H \cap \mathbb{N}^2$ est infini.

d. Soit $X_0 = (1, 0)$. Montrer que $H \cap \mathbb{N}^2 = \{A^k(X_0)\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$.

4. (*Mines*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f + g = \mathrm{Id}_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant n$. Montrer que f et g sont des projections.

5. (*Mines*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

a. Soit F un sous-espace de E, de dimension p. Montrer que $U = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \operatorname{Ker} f\}$ et $V = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f(F) \subset F\}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$, et donner leurs dimensions.

b. Soit G un deuxième sous-espace de E ; on note q et r les dimensions respectives de G et $F \cap G$. Déterminer la dimension de $W = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f(F) \subset F \text{ et } f(G) \subset G\}$.

6. (*Mines*) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & \ddots & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

7. (*Mines*) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall k \in [\![0, 2n]\!] \quad |\det(A + kB)| = 1$. Que peut-on dire de $\det A$? de $\det B$?

8. (*Mines*) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

a. Soient $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $t \longmapsto \sum_{k=1}^n b_k t^{\alpha_k}$ s'annule au plus $n - 1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soient $t_1, \ldots, t_n$ n réels strictement positifs, tels que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Soit $M = (t_i^{\alpha_j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det M > 0$.

9. (*Mines*) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{rg} B = 1$. Montrer que $\det(A + B)\det(A - B) \leqslant \det A^2$.

10. (*Mines*) Soient A, B, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $CD = DC$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

11. (*ENSEA*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$, on pose $\varphi(x, y, z) = \det_{\mathcal{B}}\big(f(x), y, z\big) + \det_{\mathcal{B}}\big(x, f(y), z\big) + \det_{\mathcal{B}}\big(x, y, f(z)\big)$.
Montrer que $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \varphi(x, y, z) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$.

12. (*Mines*) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

13. (*Centrale*) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice carrée. Donner une caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice à l'aide du polynôme minimal.

b. Calculer $\det A$ et A^2.

c. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, tel que u^2 soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

d. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

14. (*Centrale*) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X \longmapsto AX - XB$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Soient α une valeur propre de A, β une valeur propre de B ; montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$.

15. (*Mines*) Soient $n \geqslant 2$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si les racines de χ_M sont toutes simples.

16. (*Mines*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice M_n a trois valeurs propres réelles α_n, β_n et γ_n, vérifiant $\alpha_n < 0 < \beta_n < 2 < \gamma_n$.

b. Étudier le comportement asymptotique des suites (α_n), (β_n) et (γ_n) (limites, équivalents).

17. (*Mines*)

a. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace de dimension finie E. Décrire les sous-espaces stables par f.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer les sous-espaces stables par f.

18. (*Mines*) Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

19. (*Mines*) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}.

20. (*Centrale*) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ; soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables (c'est-à-dire trigonalisables dans une même base).

21. (*Centrale*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, et P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$. Étudier l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $P(A) = 0$ dans les cas suivants :

a. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; **b.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; **c.** $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $P = X^3 - X - 1$.

22. (*Mines*) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $a \in \mathbb{C}$, et f et g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g - g \circ f = af$.

a. On suppose ici $a = 0$. Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

b. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\operatorname{tr} h^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que h est nilpotent.

c. On suppose $a \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$. En déduire que f est nilpotent, puis montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

23. (*Mines*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (F, G) de sous-espaces de E vérifiant

- $E = F \oplus G$;
- F et G sont stables par f ;
- l'endomorphisme induit par f sur F est nilpotent ;
- l'endomorphisme induit par f sur G est injectif.

24. (*Mines*) Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. On suppose que, pour tout vecteur $x \in E$, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)^2$.
Montrer que les vecteurs e_i sont unitaires, puis qu'ils forment une base orthonormée de E.

25. (*Mines*) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire pour lequel la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

a. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$ et $F \oplus F^\perp$.

b. Existe-t-il $P \in F$ tel que $d(1, F) = \|1 - P\|$?

26. (*Mines*) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel f est une rotation ?

27. (*Mines*)

a. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{ij} - a_{ji})^2$ en fonction de $\mathrm{tr}(A^2)$.

b. Soit $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle(1 - \mathrm{tr}\, A)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{ij} - a_{ji})^2$.

28. (*Mines*) Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, n'ayant pas 1 pour valeur propre. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $B_p = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k$. Étudier la convergence de la suite (B_p).

29. (*Mines*) Soit E un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ deux bases orthonormées de E. Montrer que le nombre $\displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \big(f(e_i)\,|u_j\big)^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ choisies. Dans la suite, ce nombre sera noté $S(f)$.

b. Que vaut $S(f)$ si f est un projecteur orthogonal ?

c. On suppose que f est un projecteur de rang 1. Montrer que $S(f) \geqslant 1$.

30. (*Mines*) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|a| \neq |b|$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = a$ si $i + j$ est pair, $a_{ij} = b$ sinon. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer ses éléments propres.

31. (*Centrale*) Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit qu'un vecteur u est combinaison convexe des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

a. Si u_1 et u_2 sont combinaisons convexes de $v_1, \ldots, v_p$, montrer que toute combinaison convexe de u_1 et u_2 est combinaison convexe de $v_1, \ldots, v_p$.

b. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont dans $[-1, 1]$. Montrer que S est combinaison convexe de matrices orthogonales.

c. On admet le résultat suivant : pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe O orthogonale et S symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que le spectre de ${}^tMM$ soit inclus dans $[-1, 1]$. Montrer que M est combinaison convexe de matrices orthogonales.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est combinaison convexe de matrices orthogonales si et seulement si $\mathrm{Sp}({}^tMM) \subset [0, 1]$.

32. (*Mines*) Soit $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\det(M + I_n)^{1/n} \geqslant 1 + (\det M)^{1/n}$.

33. (*Mines*) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

a. Rappeler la définition d'une fonction convexe ; en donner diverses caractérisations.

b. Montrer que $\det A$ et les a_{ii} sont dans $\mathbb{R}_+$. Comparer $\det A$ et $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

34. (*Mines*) Soit E un espace euclidien.

a. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ deux bases orthonormées de E, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit un endomorphisme f de E par $\forall x \in E \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) u_i$.
Déterminer un endomorphisme g de E tel que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(f(x)|y\big) = \big(x|g(y)\big)$. Existe-t-il un seul tel g ? Comparer les matrices de f et g dans une base orthonormée.

b. Déterminer $g \circ f$. Que représentent les vecteurs e_k et les nombres λ_k^2 pour $g \circ f$?

c. Réciproquement, montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors on peut trouver deux bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ de E, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que $\forall x \in E \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) u_i$.

35. (*Mines*) Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sup\big\{|P(t)|\ ;\ t \in [0, 1]\big\}$ et $N_2(P) = \sqrt{P(0)^2 + \int_0^1 P'(t)^2\, dt}$.

a. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Sont-elles équivalentes ?

36. (*Mines*) Soit E un espace préhilbertien réel. Soit U l'ensemble des couples $(x, y) \in E^2$ tels que (x, y) soit libre. Montrer que U est un ouvert de E^2.

37. (*Mines*) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\ ;\ t \in [0,1]\}$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ pour tout $f \in E$. On pose d'autre part $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

a. Déterminer l'adhérence de F pour $\|\ \|_\infty$, puis pour $\|\ \|_1$.

b. Même question avec l'intérieur de F.

38. (*Mines*)

a. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices nilpotentes.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soit S l'ensemble des matrices semblables à A. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice nulle soit adhérente à S.

39. (*Mines*) Soit (a_n) une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_n + \dfrac{a_{2n}}{2}$. Montrer que, si (b_n) converge, alors (a_n) converge.

40. (*Centrale*) On définit (u_n) par $u_1 = a \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$ pour $n \geqslant 2$.

a. Pour $n \geq 2$, relier S_n et $\dfrac{\ln u_n}{2^{n-1}}$.

b. Montrer qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que (u_n) a pour limite 0 si $a < a_0$, et pour limite $+\infty$ si $a > a_0$; on ne cherchera pas à calculer la valeur de a_0.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand $a = a_0$.

41. (*Mines*) Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que (u_n) a pour limite 0, et donner un équivalent de u_n.

42. (*Mines*) Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{nu_n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

a. Déterminer la limite de u_n.

b. Déterminer un équivalent simple de u_n.

43. (*Centrale*) Soit f une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On suppose que $\|f\|_\infty < 1$, et que f a un point fixe a vérifiant $f'(a) = \lambda \neq 0$.

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = u_n - a$ et $v_n = e_n/\lambda^n$.

a. Montrer que la série $\sum |e_n|$ converge.

b. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a + b\lambda^n + o(\lambda^n)$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a + b\lambda^n + c\lambda^{2n} + o(\lambda^{2n})$ quand n tend vers $+\infty$.

44. (*Mines*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \prod_{k=1}^n (2 - e^{1/k})$.

a. La série $\sum (-1)^n a_n$ converge-t-elle ?

b. Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(n^\beta a_n)$ ait une limite finie strictement positive.

45. (*Mines*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n - 3\lfloor n/3 \rfloor}{n(n+1)}$. Après avoir prouvé son existence, calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

46. (*Mines*) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_n)^{1-1/n}$ converge.

47. (*Mines*) Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n (a + kb)$ et $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n (a + kb)^{1/n}$.

Déterminer la limite de (A_n/B_n).

48. (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

49. (*Mines*) Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Soit u l'application qui, à $f \in E$, associe $u(f) : x \longmapsto f(x+1)$.

Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$; déterminer ses valeurs propres et ces vecteurs propres.

50. (*Mines*) Déterminer les fonctions convexes et majorées sur $\mathbb{R}$.

51. (*Centrale*) Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[0,1]$, on pose $V(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. On dit que f est à variation bornée si l'ensemble des $V(f,\sigma)$, quand σ décrit l'ensemble des subdivisions de $[0,1]$, est majoré ; la borne supérieure de cet ensemble est alors notée $V(f)$ et appelée variation totale de f.

a. Montrer que, si f est monotone, alors f est à variation bornée ; même question si f est lipschitzienne.

b. Donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ qui n'est pas à variation bornée.

c. On suppose f de classe C^1 sur $[0,1]$. Montrer que f est à variation bornée, et exprimer $V(f)$ sous forme d'une intégrale.

d. Montrer que f est à variation bornée si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $g-h$, où g et h sont croissantes.

52. (*Mines*) Si g est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(g) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. Prouver l'existence de $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|\int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f) - \frac{1}{2n}\,S_n(f') - \frac{1}{6n^2}\,S_n(f'')\right| \leqslant \frac{M}{n^3}$$

53. (*Centrale*)

a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\,dt = -\int_0^\pi ie^{it}P(e^{it})\,dt$.

b. Soit $(a_0,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \frac{a_ia_j}{i+j+1} \leqslant \pi\sum_{k=0}^n a_k^2$.

54. (*Mines*) Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)\,dt$.

55. (*Mines*)

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\,dx$.

b. Pour $a > 0$, prouver l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{-x}-e^{-nx})\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\,dx$. Déterminer la limite de (I_n) ; en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\,dx$.

56. (*Centrale*) Soit $D = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{R}e(s) > 1\}$.

a. Soit $s \in D$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-s} = \sum_{n\geqslant 1} e^{-s\ln n}$ converge.

b. Pour $s \in D$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$. Montrer que ζ est continue sur D.

c. Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant a$.

Montrer que $\displaystyle\left|f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\sup\{|f'(t)|\ ;\ t \in [n,n+1]\}$.

d. Soient $D = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{R}e(s) > 0\}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{C}$, $s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^s}\right)$. Montrer que φ est définie et continue sur D'.

e. Donner un développement asymptotique à deux termes de ζ au voisinage de 1.

57. (*Mines*) Donner le domaine de définition, puis une expression simple, de $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

58. (*Mines*)

a. Déterminer le domaine de définition D de $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$.

b. Déterminer la limite et un équivalent de f en chaque borne de D.

59. (*Mines*) Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{n\ln n}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

c. Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

60. (*Mines*) Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+(-1)^n n}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur $\mathbb{R}_+^*$.

61. (*Centrale*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{(-1)^n n}{x^2+n^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n$.

b. La fonction f est-elle de classe C^∞ sur D ?

c. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

62. (*Mines*) Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur chaque intervalle $]k, k+1[$ où $k \in \mathbb{Z}$; et que f est impaire.

b. Montrer que f est périodique de période 1 ; et que $f(2x) = f(x) + f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout x tel que $2x \notin \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $g : x \longmapsto f(x) - \mathrm{cotan}(\pi x)$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

d. En étudiant le maximum de g sur $[0, 1]$, montrer que g est la fonction nulle.

63. (*Centrale*) Si $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose $D(f, s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ sous réserve d'existence.

a. Soient $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, et s_1 et s_2 dans $\mathbb{C}$, tels que $\mathcal{R}e(s_1) \leqslant \mathcal{R}e(s_2)$. Montrer que, si la série définissant $D(f, s_1)$ converge absolument, alors il en est de même pour la série définissant $D(f, s_2)$.

b. Pour f et g dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, on note $f * g$ l'élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ défini par $[f*g](n) = \displaystyle\sum_{d\in\mathbb{N}^*, d|n} f(d)g(n/d)$ (la somme est étendue aux diviseurs strictement positifs d de n). Soit $s \in \mathbb{C}$, tel que les séries définissant $D(f, s)$ et $D(g, s)$ convergent absolument.
Montrer que $D(f * g, s)$ est bien défini et donner sa valeur.

c. On note φ la fonction indicatrice d'Euler et ζ la fonction de Riemann (voir exercice **56**). Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$.

64. (*Centrale*)

a. Déterminer les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) + f(-x)$.

b. Soit $\alpha \in\ ]-1, 1[$. Déterminer les fonctions f, développables en série entière au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}$, et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

65. (*Centrale*) Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_{-1}^1 t^k f(t)\, dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, on pose $a_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t + \ln n}\, dt$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Montrer que $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k I_k}{(\ln n)^{k+1}}$.

b. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_0 = \cdots = I_{p-1} = 0$ et $I_p \neq 0$. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^p I_p}{(\ln n)^{p+1}}$.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série $\sum a_n$ converge.

66. (*Mines*) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ et calculer sa somme.

67. (*Mines*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point invariant ; on pose $D_0 = 1$.

a. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$.

b. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

c. Donner une expression de D_n pour tout n. Quelle est la limite de $D_n/n!$? Interpréter.

68. (*Centrale*) On pose $a_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_k = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}$.

a. Déterminer, pour tout k, une relation entre a_k et a_{k+1} : en déduire que $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est définie et continue sur $]-1,1[$.

b. Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in\,]-1,1[$.

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k}$.

69. (*Mines*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln 2} (e^t - 1)^n \, dt$.

a. Trouver une relation de récurrence simple vérifiée par la suite (I_n).

b. Étudier le sens de variation de la suite ; déterminer un équivalent simple de I_n.

c. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

70. (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{t}{e^t - 1}$.

a. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b. Montrer que f est développable en série entière en 0. On commencera par noter que $1/f$ est développable en série entière en 0 ; on donnera un minorant strictement positif du rayon de convergence R du développement de f.

c. Montrer que $R \leqslant 2\pi$.

71. (*Mines*) Soit $f : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{\sqrt{n}}$. Donner un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers 1^-.

72. (*Mines*) Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs ; pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que (S_n) a pour limite $+\infty$, et que $a_n = o(S_n)$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n t^n$ et $\sum S_n t^n$; donner une relation entre leurs sommes.

73. (*Mines*) Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n = o(1/n)$ en $+\infty$. Soit $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

a. Montrer que f est bien définie sur $[0,1[$. L'est-elle forcément en 1 ?

b. Montrer que $\quad f(t) \underset{t \to 1^-}{=} o\big(-\ln(1-t)\big)$.

74. (*Mines*) Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} \, dt$.

a. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. La fonction f est-elle intégrable sur $]0,1]$? sur $[1,+\infty[$?

75. (*Centrale*) Pour $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan t)}{\tan t} \, dt$ et calculer $F(x)$.

76. (*Centrale*) Soient $\quad f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \quad$ et $\quad g : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} \, dt$.

a. Donner le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe C^2 sur l'intérieur de D, et calculer $f''(x) + f(x)$ pour tout x intérieur à D.
Quelle est la limite de f en $+\infty$?

b. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et égale à f sur cet intervalle.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

77. (*Mines*)

a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

c. Pour $x \geqslant 0$, soit $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Montrer que $\forall x > 0 \quad f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} g\left(\frac{u}{x}\right) du$. Calculer $f(0)$.

78. (*Mines*) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et p une fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'équation différentielle $y' - \lambda y = p(t)$ a-t-elle des solutions 1-périodiques ?

79. (*Mines*) Soient a et b deux fonctions continues sur un segment $[u, v]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit f une solution sur $[u, v]$ de l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, différente de la fonction nulle.
Montrer que f ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur $[u, v]$.

80. (*Centrale*)

a. Soient $a \in \mathbb{C}$, de partie réelle strictement négative, et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et de limite 0 en $+\infty$. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = g(t)$ sous forme intégrale. Montrer que toutes les solutions ont pour limite 0 en $+\infty$.

b. On note D l'endomorphisme $f \longmapsto f'$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que toutes ses racines complexes aient des parties réelles strictement positives.
On suppose trouvée $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $[P(D)](f)$ ait pour limite 0 en $+\infty$. Montrer que f a pour limite 0 en $+\infty$.

c. Soit F l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit d le degré du polynôme P introduit en **b** ; soit f une fonction de classe C^d sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que, si $[P(D)](f)$ est dans F, alors $f \in F$.

81. (*Mines*) Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \,]0,1[\quad f(x) = \displaystyle\int_{1-x}^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

82. (*Centrale*) Soit (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum n a_n$ converge absolument.
Pour $(x, y) \in [0, \pi]^2$, on pose $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \sin(nx) \quad$ et $\quad g(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx)\sin(ny)$.

a. On suppose que g est à valeurs positives. Montrer que f est à valeurs positives.

b. Étudier la réciproque.

83. (*Mines*) On définit f sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si x ou y est non nul.

a. Montrer que f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

b. Déterminer les extremums de f.

84. (*Mines*) Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ pour lesquelles la fonction $g : (x, y, z) \longmapsto f\left(\dfrac{x}{y+z}\right)$ vérifie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

85. (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 1$. Montrer que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

86. (*Centrale*) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \,]0,1[$; on pose $I = \,]-a, a[$. Soit f une application de classe C^1 de $I \times I$ dans I, vérifiant $\forall (x, y) \in I^2 \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant k$.

a. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans I^2. Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f\big((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2\big)$. Montrer que φ est dérivable, et préciser sa dérivée.

b. Soit $(\alpha, \beta) \in I^2$. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$, et $\quad u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad a_n = \max\big\{|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|\big\}$.
Montrer que la série $\sum a_n$ converge ; en déduire que la suite (u_n) converge.

c. Montrer que la limite de (u_n) ne dépend pas de (α, β).

87. (*Centrale*) Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$.

a. Montrer que f est de classe C^∞.

b. Montrer que f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier ; on notera $\widetilde{f}$ ce prolongement.

c. Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

d. Montrer que $\widetilde{f}$ présente un maximum et un minimum.

88. (*Centrale*) Soit X une variable aléatoire réelle centrée, telle que $|X| \leqslant 1$.

a. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$. Montrer que $e^{tx} \leqslant \dfrac{1}{2}\big[(1-x)e^{-t} + (1+x)e^{t}\big]$.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que e^{tX} est d'espérance finie, et que $E(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$.

89. (*Mines*) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue successivement n tirages sans remises.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir les boules 1, 2 et 3 dans cette ordre (pas nécessairement consécutivement) ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir les boules 1, 2 et 3 consécutivement et dans cet ordre ?

90. (*Mines*)

a. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$. On munit le groupe S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On choisit aléatoirement une permutation σ.
Déterminer la probabilité de l'événement A_j : "$\forall i < j \quad \sigma(i) < j$".

91. (*Mines*) La clé d'un cadenas a été mélangée à $n-1$ autres clés. On essaie les clés successivement et sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne clé au k-ième essai ?

92. (*Mines*) Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun de ces événements ne soit réalisé est majorée par $\exp\big(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\big)$.

93. (*Mines*) Soit X une variable aléatoire réelle discrète, f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, et $Y = f(X)$. On suppose que X et Y sont indépendantes ; que peut-on dire de f ?

94. (*Mines*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit aléatoirement une urne, puis on tire une boule dans l'urne choisie. Soient X et Y les variables aléatoires donnant respectivement le numéro de l'urne choisie et le numéro de la boule tirée.

a. Donner la loi de (X,Y).

b. Calculer l'espérance de Y.

95. (*Mines*) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée ; les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables. Soit S la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. Calculer $E(S)$.

96. (*Mines*) On donne n^2 variables aléatoires réelles discrètes X_{ij}, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On suppose que les X_{ij} sont mutuellement indépendantes, et suivent la même loi, d'espérance finie m.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice aléatoire dont les coefficients sont les (X_{ij}). Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer l'espérance de $\chi_A(\lambda)$.

97. (*Centrale*) Soient $p \in \,]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geqslant 2$. On effectue une infinité de tirages à pile ou face. Les tirages sont indépendants, et, à chaque tirage, la probabilité d'obtenir face est p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n (respectivement P_n) l'événement "face (respectivement pile) sort au n-ième tirage". Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : "au n-ième tirage, on obtient r faces consécutives pour la première fois".

a. **i.** Déterminer $E_1, \dots, E_{r-1}$ et E_r.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $E_{n+r+1} = \left(\displaystyle\bigcap_{k=n+2}^{n+r+1} F_k\right) \cap P_{n+1} \cap \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k\right)$.

iii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est bien un événement.

Dans la suite, on pose $p_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = P(E_n)$.

b. Montrer que la série $\sum p_n$ converge.

c. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+r+1} = p^r(1-p)\,(1-\sum_{i=1}^n p_i)$.

d. Pour $x \in [-1,1]$, on pose $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

i. Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$.

ii. Montrer que $\quad \forall x \in\,]-1,1[\quad \dfrac{G(x)}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} p_i\right)x^n.$

iii. Exprimer $G(x)$.

98. (*ENSEA*)

a. Soients X une variable aléatoire réelle bornée et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que $\quad P(X \geqslant d) \leqslant \inf\limits_{t>0} \dfrac{E(e^{tX})}{e^{td}}$.

b. Soients $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in\,]0,1[$ et $\alpha \in\,]0,1[$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$. Que donne le résultat précédent avec $X = X_n$ et $d = \alpha n$?

99. (*Mines*) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$; soit $n = p_1^{q_1} \times \cdots \times p_r^{q_r}$ sa décomposition en facteurs premiers, les p_i étant deux à deux distincts. On munit $\Omega = [\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme.

a. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on pose $M_i = \{k \in \Omega \mid p_i | k\}$. Calculer $P(M_i)$; montrer que les événements $M_1, \ldots, M_r$ sont mutuellement indépendants.

b. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n. Montrer que $\quad \dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Indications

1. a. Si $t \in S$, $A(k+1)$ contient $A(k)*t$, de cardinal a_k. **b.** Pour des raisons de cardinal, il existe $k \leqslant n$ tel que $a_k = a_{k+1}$. Si t_0 est un élément particulier de S, tout élément de $A(k+1)$ peut alors s'écrire $a * t_0$, où $a \in A(k)$; en déduire que $a_{k+2} = a_{k+1}$. **c.** Si $s \in S$, alors $e = s^n \in A(n)$; donc $A(2n)$ doit contenir $A(n) * e = A(n)$, donc $A(k+1) = A(k)$ pour $k \geqslant n$.
2. Si n a un diviseur premier impair p, alors $X^p + 1$ est divisible par $X + 1$.
3. b. Utiliser $(1,0) \in H$, puis $(2,1) \in H$ et $(2,-1) \in H$. **d.** Si $(x,y) \in H \cap \mathbb{N}^2$ et $y > 0$, montrer que $(x',y') = A^{-1}(x,y)$ est dans $H \cap \mathbb{N}^2$, et que $x' < x$.
4. Noter que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, en déduire $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$.
5. a. Pour les dimensions, étudier les matrices dans une base adaptée à F. **b.** Décomposer $F + G$ en $(F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$, avec $F_1 \subset F$.
7. Noter que $k \longmapsto \det(A + kB)$ est un polynôme de degré au plus n, qui prend $n+1$ fois la même valeur. Si $\det B \neq 0$, obtenir une contradiction en factorisant par B.
8. a. Raisonner par récurrence ; diviser par α_n, et étudier la dérivée. **b.** Récurrence sur n, en considérant $\det M$ comme fonction de t_n et en développant par rapport à la dernière colonne.
9. B est semblable à une matrice B' n'ayant qu'une colonne non nulle ; développer $\det(A' + B')$ par multilinéarité.
10. Dans le cas D inversible, multiplier par une triangulaire par blocs bien choisie pour faire apparaître $AD - BC$; puis raisonner par densité pour le cas général.
11. Montrer que φ est trilinéaire alternée. Le cours dit alors que…
12. Écrire $P = XQ$; on a $Q(0) \neq 0$, appliquer le lemme des noyaux.
13. c. Le polynôme minimal de u^2 donne un polynôme annulateur de u ; utiliser ensuite le lemme des noyaux.
14. b. Prendre des colonnes Y et Z telles que $AY = \alpha Y$ et ${}^tBZ = \beta Z$, et poser $X = Y\,{}^tZ$. **c.** La condition est que A et B aient une valeur propre commune. Si la matrice X est solution, montrer que $P(A)X = XP(B)$ pour tout polynôme P.
15. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, que peut valoir $\operatorname{rg}(M - \lambda I_n)$?
16. a. Calculer $\chi_{M_n}(0)$ et $\chi_{M_n}(2)$. **b.** Réécrire l'équation $\chi_{M_n}(\lambda) = 0$ sous la forme $F(\lambda) = n$, et montrer que F est injective sur chaque intervalle ; on peut donc résoudre sous la forme $\lambda = F_i^{-1}(n)$ sur l'intervalle i.
17. b. Si P est un plan stable, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit g divise χ_f et annule g.
18. Le polynôme χ_A est unitaire (au signe près) et à coefficients entiers, et ses racines font partie des racines de $4X^3 + 2X^2 + X$.
19. C'est un classique : si l'une des matrices est inversible, alors AB et BA sont semblables ; puis on en déduit le cas général par densité des inversibles.

20. Écrire les matrices dans une base adaptée à $\mathrm{Ker}\, f$, et trigonaliser les blocs diagonaux.
21. La discussion doit porter sur n. **a.** Prendre $A = \lambda I_n$ où λ est racine de P. **b.** Si P n'a pas de racine réelle, montrer que A n'a pas de valeurs propres réelles, puis que n est pair ; pour la réciproque, commencer par chercher une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ annulée par P. **c.** Montrer que P n'a pas de racine rationnelle, puis que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Les seules valeurs propres complexes possibles de A sont les racines de P, en déduire que χ_A est une puissance de P, donc que n est multiple de 3.
22. a. Les sous-espaces propres de f sont stables par g. **b.** Montrer que toutes les valeurs propres sont nulles. **c.** Pour le vecteur propre, montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est stable par g.
23. Pour l'existence, écrire χ_f sous la forme $X^k P$ où $P(0) \neq 0$, et appliquer le lemme des noyaux. Pour l'unicité, noter que χ_f doit être le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes induits.
24. En prenant $x = e_p$, on obtient $\|e_p\| \leqslant 1$. Décomposer ensuite e_p sous la forme $y + z$, avec $y \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1})$ et $z \in F^\perp$, et appliquer l'hypothèse à z pour obtenir $\|e_p\| = 1$; il faut pour cela justifier $z \neq 0_E$. Pour génératrice, prendre x orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
25. a. Les éléments de $F^\perp$ sont en particulier orthogonaux à tous les $X^n - 1$. **b.** Si $P \in F$, il existe $Q \in F$ tel que $(1 - P|Q) \neq 0$ d'après **a** ; montrer que l'on peut construire à partir de P et Q un polynôme $R \in F$ tel que $\|1 - R\| < \|1 - P\|$.
26. On veut que la matrice de f dans une certaine base $\mathcal{B}$ soit une matrice de rotation ; on prendra alors cette base comme base orthonormée. Si cela fonctionne, quel est l'angle de la rotation ?
27. a. La norme de chaque ligne ou colonne vaut 1 ; noter que les éléments diagonaux n'apparaissent pas dans la somme. On obtient $n - \mathrm{tr}(A^2)$. **b.** Prendre la forme réduite de A.
28. Utiliser la forme réduite de A ; noter que, si $\theta \neq 2k\pi$, $\dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} e^{ik\theta}$ a pour limite 0.
29. a. Vérifier d'abord qu'il ne dépend pas de $\mathcal{C}$. Avec $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, exprimer ce nombre en fonction de la matrice de f dans $\mathcal{B}$; penser au produit scalaire usuel sur les matrices. **b.** et **c.** Prendre une base adaptée à $\mathrm{Im}\, f$.
30. Déterminer le noyau ; noter que les sous-espaces propres doivent être 2 à 2 orthogonaux.
31. b. Diagonaliser S, puis utiliser des matrices orthogonales diagonales dont tous les coefficients diagonaux valent 1, sauf un qui vaut -1. **c.** Montrer que $\mathrm{Sp}(S) \subset [-1, 1]$. **d.** Si M est combinaison convexe de matrices orthogonales, alors ${}^t MM$ aussi.
32. Cela revient à prouver $\dfrac{1}{n}\sum \ln(1 + \lambda_i) \geqslant \ln\big(1 + (\prod \lambda_i)^{1/n}\big)$. Dans le cas où les λ_i sont tous non nuls, utiliser la convexité de $t \longmapsto \ln(1 + e^t)$.
33. Pour $a_{ii} \geqslant 0$: $a_{ii} = (e_i|f(e_i))$, calculer cette expression dans une base orthonormée de vecteurs propres. Il faut ensuite prouver $\det A \geqslant \prod_{i=1}^n a_{ii}$; diagonaliser A dans le groupe orthogonal, exprimer a_{ii} en fonction des valeurs propres λ_j et des coefficients de la matrice de passage P. Cette matrice étant orthogonale, a_{ii} est un barycentre des λ_j.
34. a. Pour l'unicité, noter que, si g et g' sont solutions, alors, pour chaque y, $\big(x|g(y)\big) = \big(x|g'(y)\big)$ pour tout x. **c.** Il faut trouver une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ dont l'image est une famille orthogonale. Définir g par sa matrice et diagonaliser $g \circ f$.
35. a. Montrer que N_2 vient d'un produit scalaire. **b.** Comparer $N_1(X^n)$ et $N_2(X^n)$.
36. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Pour $(x, y) \in E^2$, calculer λ et v tels que $y = \lambda x + v$ et $(v|x) = 0$. Montrer que v et x restent non nuls si (x, y) reste assez proche de (x_0, y_0).
37. a. Pour $\|\ \|_1$: si $f \in E$ quelconque, on peut remplacer f par des fonctions affines sur $[0, \varepsilon]$ et $[1 - \varepsilon, 1]$ de manière à obtenir une fonction $g \in F$ "très proche" de f. **b.** En ajoutant la constante ε à une fonction $f \in F$, on sort de F.
38. a. Pour l'adhérence, toutes les nilpotentes vérifient $M^n = 0$. Pour l'intérieur, si N est nilpotente, alors $N + \lambda I_n$ ne l'est pas. **b.** Montrer que, si B est adhérente à S, alors $\chi_B = \chi_A$. Pour la réciproque, montrer qu'une matrice T triangulaire stricte est semblable à λT pour tout $\lambda \neq 0$.
39. Exprimer a_n en fonction des b_p à l'aide d'une somme infinie ; puis commencer par le cas où (b_n) tend vers 0.
40. c. Il s'agit de comparer le reste de la série $\sum(\ln k/2^{k+1})$ à $1/2^n$; utiliser la sommation des relations de comparaison.
41. Écrire $n!u_n$ sous forme d'une somme et utiliser la sommation des relations de comparaison, en notant que $k! \sim k! - (k-1)!$.
42. a. Si u_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n + 1/(n\ell)$ et (u_n) diverge, contradiction. **b.** Calculer $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et utiliser la sommation des relations de comparaison.

43. a. Majorer $|e_n|$ par une suite géométrique à l'aide des accroissements finis. **b.** Justifier que la série $\sum \ln(v_{n+1}/v_n)$ converge. **c.** Un DL_2 donne un équivalent de $e_{n+1} - \lambda e_n$; appliquer ensuite la sommation des relations de comparaisons à la série $\sum (e_{n+1} - \lambda e_n)/\lambda^{n+1}$.
44. a. Pour la limite de (a_n), étudier $\ln(a_n)$, en cherchant un équivalent simple de $2 - e^{1/k}$. **b.** Poser $b_n = \ln(n^\beta a_n)$, et étudier la série $\sum (b_n - b_{n+1})$.
45. En utilisant une décomposition en éléments simples, exprimer S_{3n} en fonction de H_n et H_{3n}, où H_p est la somme partielle de rang p de la série harmonique. Utiliser ensuite le développement usuel $H_p = \ln p + \gamma + o(1)$.
46. Dans le cas où $\sum a_n$ converge, majorer chaque $(a_n)^{1-1/n}$ par le terme général d'une série convergente, en séparant par exemple les cas $a_n < 1/2^n$ et $a_n \geqslant 1/2^n$.
47. Pour obtenir un équivalent de B_n, commencer par encadrer $\ln B_n$ par des intégrales ; attention, il faut déterminer la limite de $\ln B_n$, pour pouvoir en déduire un équivalent de B_n.
48. Pour un $M \in \mathbb{R}_+$ donné, $f([0, M])$ est un segment, donc f va prendre des valeurs positives et des valeurs négatives sur $]M, +\infty[$.
49. Si g est un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda \neq 1$, étudier la suite $\big(f(x+n)\big)$ ou $\big(f(x-n)\big)$ pour un x bien choisi, pour obtenir une contradiction.
50. Utiliser les inégalités entre taux de variation.
51. b. Prendre $x \sin(1/x)$, judicieusement prolongée en 0. **c.** On a $V(f) = \int_0^1 |f'(t)|\, dt$; utiliser l'uniforme continuité de f' pour approcher cette intégrale par des $V(f, \sigma)$. **d.** Plus délicat... Normalement, cela doit marcher en prenant $g(x)$ égal à la variation totale de f sur $[0, x]$.
52. Appliquer Taylor-Lagrange à une primitive de f sur chaque $[k/n, (k+1)/n]$.
53. a. Commencer par $P = X^n$. **b.** La première somme est $\int_0^1 P(t)^2\, dt$, la deuxième est $\int_{-\pi}^{\pi} |P(t)|^2\, dt$ à un facteur près.
54. En $+\infty$, utiliser un DL_2 de $\ln(1+u)$. L'intégrale du premier terme converge classiquement ; le reste est équivalent à $\sin^2 t/2t^{2\alpha} > 0$; linéariser $\sin^2$.
55. a. La fonction intégrée est une somme géométrique. **b.** Prendre l'intégrale sur $[b, c]$, se ramener à deux intégrales de e^{-t}/t, découper par Chasles pour avoir une intégrale dont les bornes ne dépendent que de b et une dont les bornes ne dépendent que de c. **c.** Montrer que $1/x - 1/(1 - e^{-x})$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
56. a. Étudier la série des modules. **b.** Prouver la convergence normale sur $\mathcal{R}e(s) \geqslant a$ où $a > 1$. **c.** Écrire la différence sous forme d'une intégrale, majorer par les accroissements finis. **d.** S'inspirer de **b**, en utilisant **c** pour majorer. **e.** Utiliser la continuité de φ en 1. On peut justifier que $\varphi(1) = \gamma$, la constante d'Euler.
57. C'est une dérivée. Noter que $\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$ a une expression simple.
58. a. Pour $x = 1$, comparer à une intégrale. **b.** En $+\infty$, l'équivalent est le premier terme. En 1, comparer à une intégrale ; transformer cette intégrale sous la forme $\int_{g(x)}^{+\infty} h(t)\, dt$, où h ne dépend pas de x, et utiliser l'intégration des relations de comparaison.
59. b. Avec $x_n = 1/n$, comparer $f(x_n)/x_n$ à $S_n = \sum_{k=2}^{n} 1/(k \ln k)$. **c.** L'équivalent est le premier terme.
60. b. Calculer $f' - f$, en séparant les termes d'indices pairs des impairs.
61. b. Décomposer f_n en éléments simples sur $\mathbb{C}$ pour calculer ses dérivées successives. **c.** Déterminer le DSE de f_n' (par exemple en dérivant celui de f_n) et montrer que l'on peut intervertir les sommes pour obtenir un DSE de f'.
62. b. Écrire les sommes partielles sous la forme $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x-k}$. **d.** Montrer que g vérifie les relations du **b** ; en déduire que, si g atteint son maximum en x_0 alors elle l'atteint ausi en $x_0/2$.
63. b. Poser $a_{pq} = \dfrac{f(p)}{p^s} \dfrac{g(q)}{q^s}$. Sommer “naturellement”, puis en groupant par paquets à pq constant. **c.** En utilisant **b**, cela revient à montrer que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. Cela peut se faire en étudiant, dans le groupe $\mathbb{U}_n$, le sous-groupe engendré par chaque élément : pour chaque diviseur d de n, il y a $\varphi(d)$ éléments de $\mathbb{U}_d$, donc de $\mathbb{U}_n$, qui engendrent $\mathbb{U}_d$.
64. a. Décomposer f en partie paire et partie impaire. **b.** Déterminer le DSE en 0. Montrer que les coeffs sont majorés en module par une constante fois les coefficients de la série exponentielle, d'où une majoration des dérivées successives ; Taylor-Lagrange donne alors le DSE en chaque point.
65. b. Écrire la série du **a** sous la forme $\dfrac{(-1)^p I_p}{(\ln n)^{p+1}} [1 + \varepsilon_n]$ et justifier que ε_n tend vers 0 en majorant par du géométrique. **c.** D'après **b.**, il faut que les I_k soient tous nuls (le $(-1)^p$ est une constante). Classiquement, on montre grâce à MM. Stone et Weierstrass que cela entraîne f nulle.

66. Introduire $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1}$ et prouver en particulier sa continuité sur $[0,1]$.
67. a. Compter les permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-k$ points invariants. **b.** Par définition, $D_n \leqslant n!$. **c.** Calculer la somme de la série entière en interprétant la relation du **a** comme un produit de Cauchy.
68. b. Écrire la relation du **a** sous la forme $2(k+1)a_{k+1} = (2k+1)a_k$, multiplier par x^k et sommer pour obtenir une équation différentielle vérifiée par f ; on trouve $1/\sqrt{1-x}$. **c.** Évaluer a_k à l'aide de M. Stirling pour justifier la convergence de la série ; en déduire que la somme est $\int_0^1 (f(x)-1)/x$, que l'on calcule par le changement $u = \sqrt{1-x}$.
69. a. Calculer $I_n + I_{n+1}$. **b.** Pour l'équivalent, utiliser **a** pour encadrer I_n.
70. b. En écrivant $f \times (1/f) = 1$, on obtient une récurrence portant sur les coefficients de la série entière de f. Justifier que ces coefficients définissent une série entière de rayon de convergence non nul, par exemple en majorant par une suite géométrique. **c.** Tout ce qui précède peut être fait sur $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.
71. Écrire $(1-t)f(t)$ comme somme d'une série entière, et justifier que sa somme est continue en 1.
72. Pour le rayon de convergence de $\sum S_n t^n$, déterminer la limite de S_n/S_{n+1} en écrivant $S_n = S_{n+1} - a_{n+1}$; en déduire celui de $\sum a_n t^n$. Enfin, la deuxième série peut s'interpréter comme un produit de Cauchy.
73. b. Découper $f(t)$ en $S_n(t) + R_n(t)$. Pour ε fixé, montrer que $|R_n(t)/\ln(1-t)| < \varepsilon/2$ pour n assez grand ; puis, à n fixé, $|S_n(t)/\ln(1-t)|$ tend vers 0 en 1.
74. b. Le changement de variable $u = xt$ permet d'obtenir un équivalent en $1/\sqrt{x}$ en 0, en $1/x$ en $+\infty$.
75. Pour le calcul, passer par la dérivée, que l'on calcule par le changement $u = \tan t$.
76. b. Résoudre l'équation $y'' + y = 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la solution nulle en $+\infty$ est g. **c.** Il faut prouver que c'est la limite de g en 0 ; développer $\sin(x-t)$, montrer que $\int_x^1 (\cos t)/t$ est dominée par du $\ln x$ en 0.
77. a. Il faut distinguer les cas $x = 0$ et $x > 0$. **c.** Pour la formule, intégrer par parties l'intégrale donnant f. En déduire que f est continue en 0.
78. Résoudre l'équation sous forme intégrale ; si f est solution, montrer, en étudiant $f(t+1) - f(t)$, qu'il suffit d'avoir $f(1) = f(0)$ pour que f soit 1-périodique. Le cas $\lambda = 1$ est un cas particulier.
79. S'il existe une suite de zéros distincts, alors cette suite a une valeur d'adhérence ℓ. Que peut-on dire de $f(\ell)$? de $f'(\ell)$?
80. a. Exprimer les solutions en fonction de $\int_x^{+\infty} e^{at} g(t)\, dt$, et utiliser l'intégration des relations de comparaison. **b.** L'opération $f \longmapsto [P(D)](f)$ peut se décomposer en une suite d'opérations du type $f \longmapsto f' + af$ où a est l'opposé d'une racine de P. **c.** En s'inspirant de ce qui précède, il suffit de montrer que, si $f' + af \in F$, alors $f \in F$. Penser à Cauchy-Schwarz pour les intégrales.
81. Réécrire l'équation en utilisant une primitive G de $t \longmapsto f(t)/t$. Dériver et substituer pour obtenir une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par G. Chercher les solutions sous formes de séries entières, et noter que $a_2 = \cdots$
82. a. Montrer que, à x fixé, $f(x)$ est la limite de $g(x,y)/y$ quand y tend vers 0. **b.** On peut par exemple, à x fixé, poser $h(t) = g\big(xt, x(1-t)\big)$ (faire une figure). La dérivée de h est du signe de de $f\big((1-2t)x\big)$, donc h croît sur $[0,1/2]$, puis décroît par imparité de f, et est nulle en 0 et 1. Cela donne $g \geqslant 0$ sur une moitié du carré, utiliser ensuite les symétries de g.
83. a. On peut facilement majorer le rapport $xy/(x+y)$ à l'aide de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. **b.** Puisque $x/(1+x) \leqslant 1$, on a $f(x,y) \leqslant 1/8$ dès que $x \geqslant 8$ ou $y \geqslant 8$. Puisque $f(1,1) = 1/8$, le maximum sur le compact $[0,8]^2$ va être le maximum sur $(\mathbb{R}_+)^2$. Chercher les points critiques.
84. On obtient $(2t^2+1)f''(t) + 4tf'(t) = 0$.
85. Examiner la dérivée de $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(tx)$.
86. b. Utiliser **a** pour montrer que $a_{n+2} \leqslant k a_n$; donc $\sum a_{2n}$ et $\sum a_{2n+1}$ convergent. **c.** Si (v_n) est une deuxième suite vérifiant la même récurrence, s'inspirer du **b** en prenant $b_n = \max\big\{|u_n - v_n|, |u_{n+1} - v_{n+1}|\big\}$.
87. b. et **c.** Écrire f sous la forme $\frac{1}{y-x}\int_x^y \cos u\, du = \int_0^1 \cos\big(x + t(y-x)\big)\, dt$. **d.** $\widetilde{f}(x+2\pi, y+2\pi) = \widetilde{f}(x,y)$, on peut se limiter à $x \in [0,2\pi]$. Trouver M tel que $|\widetilde{f}(x,y)| < 1/2$ si $|y| \geqslant M$; puisque $\widetilde{f}$ prend les valeurs 1 et -1, cela permet de se limiter à un compact.
88. a. Convexité. **b.** Le **a** permet de majorer par $\operatorname{ch} t$; utiliser ensuite le développement en série entière.
89. Dans chaque cas, dénombrez les tirages correspondants, en commençant par choisir les rangs d'apparition des boules 1, 2 et 3.
90. a. La formule de Pascal permet de mettre la somme sous forme télescopique. **b.** Pour $k \geqslant j$, compter les éléments de A_j vérifiant $\sigma(j) = k$.
91. Utiliser les probabilités composées.

92. Utiliser la convexité de l'exponentielle.
93. Montrer que f est constante.
94. **a.** Commencer par calculer $P(Y=i|X=j)$. **b.** Dans la formule de l'espérance, remplacer $P(Y=i)$ par $\sum_j P(Y=i|X=j)$, puis permuter les sommes.
95. Par transfert, il faut calculer $\sum_A P(A)(\sum_{k\in A} k)$, la première somme étant étendue à toutes les parties A de $[\![1,n]\!]$. Écrire la somme intérieure sous la forme $\sum_{k=1}^{n} k\chi_A(k)$, où χ_A est la fonction définie par $\chi_A(k)=1$ si $k\in A$, 0 sinon ; puis permuter les sommes. On est ramené à calculer, pour chaque k, le nombre de parties A contenant k.
96. Les coefficients b_k de χ_A sont des combinaisons linéaires de produits de X_{ij} deux à deux distincts ; on obtient donc l'espérance d'un coefficient b_k en remplaçant chaque X_{ij} par m.
97. **c.** Bien vérifier que les événements figurant dans la formule du **a.ii** sont indépendants. **d.ii** C'est un produit de Cauchy.
98. **a.** Utiliser l'inégalité de Markov. **b.** Tout exprimer en fonction de e^t ; noter que $u \longmapsto E(u^{X_n})$ est la fonction génératrice de X_n.
99. **b.** L'événement "k est premier avec n" est égal à "$k \in \bigcap \overline{M_i}$".