1. *CCP – Ben Tayeb*

Soient a et b deux réels. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} x & x-a & \cdots & x-a \\ x-b & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a \\ x-b & \cdots & x-b & x \end{vmatrix}$.

a. Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

b. Calculer $D(x)$.

Correction

a. On soustrait la première colonne à toutes les autres : les x disparaissent, les coefficients de ces colonnes sont des constantes.

On développe alors par rapport à la première colonne : $D(x)$ est une combinaison linéaire des coefficients de la première colonne, tous de degré 1, d'où le résultat.

b. Il existe donc λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $D(x) = \lambda x + \mu$ pour tout x.

Si $a \neq b$: on calcule immédiatement $D(a) = a^n = \lambda a + \mu$ et $D(b) = b^n = \lambda b + \mu$. On en déduit $\lambda = \dfrac{b^n - a^n}{b-a}$ et $\mu = \dfrac{ab^n - ba^n}{a-b}$.

Si $a = b$: à a et x fixés, $D(x)$ dépend continûment de b. On a donc

$$D(x) = \lim_{b \to a, b \neq a} (\lambda x + \mu) = \lim_{b \to a, b \neq a} \left(\frac{b^n - a^n}{b-a} x + \frac{ab^n - ba^n}{a-b} \right) = na^{n-1}x - (n-1)a^n$$

en passant par un DL de $b^n = (a+h)^n$ en 0.

2. *Centrale Maths 1 – Suatton*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} -3 & 9a & -4-3a \\ 1 & 1-3a & 1+a \\ 3 & -9a & 4+3a \end{pmatrix}$. Soit $G = \big\{M(a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\big\}$.

a. Montrer que G, muni du produit matriciel, est un groupe.

b. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques du neutre de G.

c. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $\forall a \in \mathbb{R} \quad P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction

a. Il faut déjà prouver que G est stable par produit. Pour cela, les calculs sont plus simples à gérer si l'on décompose $M(a)$ sous la forme $M(a) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} = M(0) + aQ_0$.

Pour calculer un produit quelconque de matrices de G, il suffit alors de calculer les quatre produits construits avec $M(0)$ et Q_0.

Le calcul donne facilement $M(0)^2 = M(0)$, $M(0)Q_0 = Q_0M(0) = Q_0$ et $Q_0^2 = 0$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a alors $M(a)M(b) = \big(M(0) + aQ_0\big)\big(M(0) + bQ_0\big) = M(0) + (a+b)Q_0 = M(a+b)$.

On en déduit :

- le produit est bien une loi de composition interne sur G ;
- le produit est associatif (propriété générale du produit matriciel) ;
- le produit a un élément neutre dans G, qui est $M(0)$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ a un symétrique pour le produit dans G, qui est $M(-a)$.

Muni du produit matriciel, G est donc bien un groupe. Notez que le neutre du produit dans G n'est pas I_3 (qui n'appartient pas à G), et que donc le symétrique d'un élément de G n'est pas son inverse (qui de toutes façons n'existe pas, les matrices $M(a)$ n'étant pas inversibles).

b. On a vu à la question précédente que $M(0)^2 = M(0)$; $M(0)$ est donc une matrice de projection.

Le sous-espace F sur lequel on projette est l'espace des invariants. On obtient immédiatement que F a pour équation $z = -x$; c'est donc le plan engendré par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 0)$.

Le sous-espace G direction de la projection est le noyau de $M(0)$. Il a pour équations $z = -3x/4$, $y = -x/4$; c'est donc la droite engendrée par $(4, -1, -3)$.

c. On cherche P telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on ait, avec les notations de la question **a**,

$$P^{-1}M(a)P = P^{-1}M(0)P + aP^{-1}Q_0P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = B_0 + aC_0$$

Il suffit pour cela d'avoir $\quad P^{-1}M(0)P = B_0 \quad$ et $\quad P^{-1}Q_0P = C_0$.

▷ Pour vérifier la condition $P^{-1}Q_0P = C_0$, on cherche une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathbb{R}^3$ (identifié comme d'habitude à l'espace des colonnes) telle que $Q_0U_1 = Q_0U_3 = 0$ et $Q_0U_2 = U_1$. En particulier, il faut prendre U_1 non nul dans l'image de Q_0, et U_2 antécédent de U_1.

▷ Pour vérifier la condition $P^{-1}M(0)P = B_0$, les vecteurs U_1 et U_2 doivent être dans F, et U_3 dans G.

On prend donc $U_1 = (-3, 1, 3)$ (l'image de Q_0 est une droite, on n'a pas vraiment le choix). On cherche ensuite un antécédent U_2 de U_1 par Q_0, qui appartienne à F : on trouve facilement $U_2 = (-1, 0, 1)$ par exemple. Enfin, on prend $U_3 = (4, -1, -3)$ (encore une fois, $\operatorname{Ker} M(0) = G$ est une droite).

On vérifie alors facilement :

- $P = \begin{pmatrix}-3&-1&4\\1&0&-1\\3&1&-3\end{pmatrix}$ est inversible (déterminant 1), donc $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$;
- U_1 et U_2 sont dans F, et U_3 est dans G, donc la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme associé à $M(0)$ est B_0, par suite $\quad P^{-1}M(0)P = B_0$;
- par construction, $Q_0U_2 = U_1$; et on vérifie immédiatement que $Q_0U_1 = Q_0U_3 = 0$. On a donc bien $P^{-1}Q_0P = C_0$.

La matrice P choisie répond donc bien à la question.

3. *Centrale Maths 2 – Suatton*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\, dt \quad$ et $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin\big((2n+1)t\big)\, dt.$

a. Avec Python, calculer les 20 premiers termes de la suite (I_n) et les 30 premiers de (J_n). Émettre des conjectures.

b. Justifier la convergence de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

c. Calculer I_0 et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1}$. Qu'en déduit-on ?

d. En supposant les conjectures prouvées, calculer la valeur de K.

e. Prouver les conjectures.

Correction

Notons déjà que I_n et J_n sont bien définies pour tout n, les fonctions intégrées étant continues sur $]0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0.

a. On doit vraisemblablement conjecturer que (I_n) est constante égale à $\pi/2$, et que (J_n) tend vers 0.

b. La fonction $f : x \longmapsto (\sin x)/x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et prolongeable par continuité en 0. Enfin, pour tout $A \geqslant 1$:

$$\int_1^A f(x)\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Le crochet a une limite finie quand A tend vers $+\infty$. D'autre part, $(\cos x)/x^2$ est dominé en $+\infty$ par $1/x^2$, donc est intégrable sur $[1, +\infty[$, par suite l'intégrale au second membre a aussi une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

Par suite, $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, et donc aussi K.

Remarque : on peut aussi intégrer par parties sur $[0, A]$, à condition de prendre $1 - \cos x$ comme primitive de $\sin x$, de manière à conserver une limite finie en 0.

c. On a immédiatement $I_0 = \pi/2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a facilement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad \sin\big((2n+1)t\big) - \sin\big((2n-1)t\big) = 2\cos(2nt)\sin t \quad$ d'où

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\, dt = \frac{1}{2n}\big[\sin(2nt)\big]_0^{\pi/2} = 0$$

La suite (I_n) est donc constante égale à $\pi/2$.

d. Supposons donc que (J_n) a pour limite 0. Notons que, pour tout n,

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,dt - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,dt - \frac{\pi}{2}$$

et donc $\quad K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, le changement $x=(2n+1)t$ donne $\quad K_n = \displaystyle\int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad$ et donc K_n tend vers K quand n tend vers $+\infty$.

Par unicité de la limite, on a donc $K=\pi/2$.

e. On veut donc démontrer que J_n a pour limite 0. Pour cela, posons $g(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$; on va se ramener à un exercice classique en montrant que g est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

Tout d'abord, $\quad g(t) = \dfrac{t-\sin t}{t\sin t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t^3}{6t^2} \quad$ et donc g peut être prolongée par continuité en 0 en posant $g(0)=0$.

D'autre part, pour $t \in \,]0,\pi/2]$, $\quad g'(t) = \dfrac{\sin^2 t - t^2\cos t}{t^2\sin^2 t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t^4}{6t^4} \quad$ après développement limité du numérateur ; g' a donc pour limite $1/6$ en 0. Puisque g est continue en 0, on sait que cela suffit à prouver que g est dérivable en 0, et que $g'(0)=1/6$; g' est donc continue en 0. Donc, après prolongement, g est bien de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, une intégration par parties fournit alors :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,dt = \left[-\frac{g(t)\cos\big((2n+1)t\big)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{g'(t)\cos\big((2n+1)t\big)}{2n+1}\,dt$$

Les fonctions g et g' sont continues sur le segment $[0,\pi/2]$, donc y sont bornées ; on en déduit facilement que les deux termes de l'expression tendent vers 0, donc que J_n a bien pour limite 0.

4. *Mines – Raveau*

a. Soit $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ injective. Montrer que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

b. Que peut-on dire si l'on remplace "injective" par "surjective" ?

Correction

a. On revient à la définition : on veut prouver que $\quad \forall A\in\mathbb{R} \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant n_0 \quad f(n)\geqslant A$.

Soit donc $A\in\mathbb{R}$. Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que $p\geqslant A$. Puisque f est injective, chaque entier a au plus un antécédent ; l'ensemble $f^{-1}(\llbracket 0,p\rrbracket)$ contient donc au plus $p+1$ éléments, donc est fini. Il est donc en particulier majoré ; soit M un majorant, et $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $n_0>M$.

Soit alors $n\geqslant n_0$. Par définition de n_0, n ne peut pas appartenir à $f^{-1}(\llbracket 0,p\rrbracket)$, et donc, puisque $f(n)\in\mathbb{N}$, on a forcément $\quad f(n)\geqslant p\geqslant A$.

On a donc trouvé $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\quad \forall n\geqslant n_0 \quad f(n)\geqslant A \quad$ ce qui prouve le résultat.

b. Si l'on remplace "injective" par "surjective", on ne peut plus dire grand chose, à part que f n'est évidemment pas bornée. En particulier, l'exemple de $f : n\longmapsto n/2$ si n est pair, $n\longmapsto 0$ si n est impair (vérifiez qu'elle est surjective) montre que f peut très bien ne pas avoir pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

5. *Mines – Raveau*

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M\longmapsto AM$.

On note comme d'habitude E_{ij} les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; pour tout $j\in\llbracket 1,n\rrbracket$, on pose $V_j=\mathrm{Vect}(E_{1,j},E_{2,j},\dots,E_{n,j})$.

a. Montrer que, pour tout j, V_j est stable par φ.

b. Pour tout j, déterminer la matrice dans la base $(E_{1,j},E_{2,j},\dots,E_{n,j})$ de l'endomorphisme induit par φ sur V_j.

c. Calculer $\det\varphi$ et $\mathrm{tr}\,\varphi$.

d. ?...

Correction

a. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On voit facilement que la matrice $\varphi(E_{ij}) = AE_{ij}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la colonne j, qui est égale à la colonne i de A ; on a donc

$$\varphi(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj} \in V_j$$

Tous les vecteurs de la base $(E_{1,j}, E_{2,j}, \ldots, E_{n,j})$ de V_j ont donc leur image dans V_j ; on en déduit immédiatement que V_j est stable par φ.

b. Notons provisoirement B la matrice cherchée. Les calculs de la question précédente montrent que, pour tout i, la colonne i de B contient les nombres $a_{1,i}, a_{2,i}, \ldots, a_{n,i}$, et donc est égale à la colonne i de la matrice A. Ceci étant vrai pour tout i, on a en fait $B = A$.

c. En concaténant les bases utilisées dans les différents sous-espaces V_j, on retrouve toutes les matrices de la base canonique, on obtient donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les deux questions précédentes montrent que la matrice de φ dans cette base est diagonale par blocs, avec n blocs égaux à A sur la diagonale.
On en déduit immédiatement $\operatorname{tr}\varphi = n \operatorname{tr} A$ et $\det\varphi = (\det A)^n$.

d. J'imagine que les questions suivantes s'intéressaient à la diagonalisabilité de φ. La forme simple de la matrice obtenue à la question précédente permet de prouver que :
▷ φ est diagonalisable si et seulement si A l'est ;
▷ $\chi_\varphi = (\chi_A)^n$, donc les valeurs propres de φ sont celles de A, avec une multiplicité multipliée par n ; si φ est diagonalisable, on a la même relation entre les dimensions des sous-espaces propres.

6. *Mines-Telecom – Wang*

On dispose d'une pièce donnant "pile" avec une probabilité $p \in]0,1[$. Dans un premier temps, on lance la pièce jusqu'à obtenir "pile" ; on note N le nombre de lancers nécessaire. On lance ensuite N fois la pièce, on note X le nombre de "pile" obtenus.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer $E(X)$.

Correction

a. La variable N suit la loi géométrique de paramètre p : $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) = pq^{n-1}$ où $q = 1 - p$.
Si l'on sait que $N = n \in \mathbb{N}^*$, la variable X donne le nombre de succès dans une suite de n expériences de Bernoulli de paramètre p indépendantes ; par suite, $P(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$; et clairement $P(X = k \mid N = n) = 0$ si $k > N$.
Les événements $(N = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ forment un système complet ; la formule des probabilités totales donne donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k \mid N = n)P(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} q^{2n-k-1}$$

avec la convention usuelle $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$.

Pour $k = 0$, on obtient, en posant $j = n - 1$, $P(X = 0) = p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-1} = pq\sum_{j=0}^{+\infty} q^{2j} = \dfrac{pq}{1-q^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} q^{2n-k-1} = p^{k+1}q^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (q^2)^{n-k} \\ &= \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(q^2)^{n-k} \end{aligned}$$

Il faut reconnaître dans la somme, la dérivée k-ième de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^k = 1/(1-x)$, appliquée à q^2. La dérivée k-ième de $x \longmapsto 1/(1-x)$ est $x \longmapsto k!/(1-x)^{k+1}$; on a donc finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k) = \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

b. On a donc $E(X) = \dfrac{1}{(2-p)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$. On reconnaît la dérivée de $1/(1-x)$ appliquée à $(1-p)/(2-p)$, donc

$$E(X) = \frac{1}{(2-p)^2}\frac{(2-p)^2}{\big((2-p)-(1-p)\big)^2} = 1$$

7. *Mines-Telecom – Wang*

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x)-f(y)| = |x-y|$.

Correction

Soit f une fonction solution. Notons déjà que f est 1-lipschitzienne donc continue sur $\mathbb{R}$.

Posons, pour tout x, $g(x) = f(x) - f(0)$. On a alors évidemment $g(x) - g(y) = f(x) - f(y)$ pour tout (x,y), et donc g est aussi solution du problème ; de plus, $g(0) = 0$.

En appliquant la propriété au couple $(x,0)$, on a donc $|g(x)| = |x|$ pour tout réel x, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$.

La fonction g ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et est continue ; elle garde donc un signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc soit $\quad \forall x > 0 \quad g(x) = x, \quad$ soit $\quad \forall x > 0 \quad g(x) = -x$.

On a évidemment la même situation sur $\mathbb{R}_-^*$. Par suite, g doit être l'une des quatre fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto -x$, $x \longmapsto |x|$ ou $x \longmapsto -|x|$. Enfin, en prenant $(x,y) = (1,-1)$ par exemple, on constate que les deux dernières fonctions ne conviennent pas.

Finalement, puisque $f(x) = g(x) + f(0)$ pour tout x, f doit être de l'une des deux formes $x \longmapsto x + c$ ou $x \longmapsto -x + c$, où c est une constante. On vérifie immédiatement que toutes les fonctions de ces deux formes sont bien solutions, ce qui achève la résolution.