Algèbre générale

1. *(ENSAM PSI)* Soit $P = (X+i)^7 + (X-i)^7$.

a. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$; quel est son degré ?

b. Montrer que 0 est racine de P, et que P a 6 autres racines réelles distinctes.

c. Déterminer la somme et le produit de ses racines non nulles.

2. *(St-Cyr PSI)* Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β et γ ses racines complexes.

a. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

b. En utilisant la division euclidienne de X^4 par P, calculer $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$.

3. On définit la suite (T_n) de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le terme dominant de T_n.

b. Montrer que $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$; soit E_n l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\quad (1-X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$. Montrer que, si $P \in E_n$, alors $P = 0$ ou $\deg P = n$. Montrer que les éléments de E_n sont les λT_n, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Algèbre linéaire élémentaire

4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. On suppose $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Montrer que $f^2 = 0$ et que $n = 2\operatorname{rg} f$.

b. On suppose réciproquement que $f^2 = 0$ et que $n = 2\operatorname{rg} f$; on pose $r = \operatorname{rg} f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$.

5. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$, de matrice A dans la base canonique. On suppose A nilpotente d'indice p.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ soit libre. Qu'en déduit-on sur le nombre p ?

b. On suppose ici $p = 3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. On suppose ici $p = 2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Soient a et b deux réels. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} x & x-a & \cdots & x-a \\ x-b & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a \\ x-b & \cdots & x-b & x \end{vmatrix}$.

a. Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

b. Calculer $D(x)$.

7. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_k vérifiant $\quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de T_k.

b. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{C}[X]$, tels que P_k soit unitaire de degré k pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice $\big(P_j(x_i)\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

c. Soient $\theta_0, \dots, \theta_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matricé $\big(\cos(j\theta_i)\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

8. a. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $P_n = X^n - X + 1$ a n racines distinctes $z_1, z_2, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

b. Soit $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}$. Montrer que $\Delta_n = 2(-1)^n$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = I_n$, $A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$.

a. Montrer que $\operatorname{tr} A \equiv n\ [2]$.

b. Montrer que $|\operatorname{tr} A| \leqslant n - 2$.

Réduction des endomorphismes

10. *(IMT MP)* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Pour quelles valeurs de (a, b, c, d) est-elle diagonalisable ?

11. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit P un vecteur propre de φ. Déterminer le degré de P

c. Déterminer les éléments propres de φ.

d. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ. L'endomorphisme induit est-il diagonalisable ?

12. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$.

a. Diagonaliser A.

b. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

c. Déterminer le polynôme minimal de B.

13. Soient $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois nombres complexes.

a. Calculer U^2. Déterminer les éléments propres de U.

b. Déterminer les éléments propres de V et de W.

c. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres commune à U, V et W.

d. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A soit inversible.

14. Soit $P = X^5 + X + 1$.

a. Montrer que P a une seule racine réelle, et que cette racine est strictement négative.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A + I_{15} = 0$. Montrer que $\det A < 0$.

15. Soient E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme diagonalisable de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u.

a. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme caractéristique de u annule u.

b. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. Calculer $\det_{\mathcal{B}}\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$.

c. On suppose de plus les x_i tous non nuls. Montrer que les valeurs propres de u sont toutes simples si et seulement si $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

16. Soit E un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul, et vérifiant $f^3 + f = 0$.

a. Que peut-on dire du spectre de f ?

b. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

c. Montrer que, si E est de dimension impaire, alors f n'est pas inversible.

d. Montrer que, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ et $x \neq 0_E$, alors $\big(x, f(x)\big)$ est libre.

e. On suppose $\dim E = 3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{C}(f)$ le commutant de f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On pose d'autre part $\mathbb{K}[f] = \big\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\big\}$.

a. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la loi $\circ$. Montrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que f admet n valeurs propres distinctes.

b. Montrer que, si $g \in \mathcal{C}(f)$, alors les vecteurs propres de f sont vecteurs propres de g ; puis que g est diagonalisable.

c. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(f)$?

d. Que dire de $\mathbb{K}[f]$?

18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^n = I_n$, et que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\mathrm{tr}\, A = 0$.

19. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose trouvé $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

a. Montrer que $\quad f$ est inversible $\iff \big(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)\big)$ est une base de E.

b. Montrer que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

Déterminer le polynôme caractéristique de f en fonction de $(a_0, \dots, a_{n-1})$.

c. Montrer que, si P est un polynôme annulateur non nul de f, alors $\deg P \geqslant n$.

En déduire que f est diagonalisable si et seulement s'il admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes.

20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $B = \big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E. On dit alors que x est un u-générateur de E.

a. On suppose u cyclique, soit x un u-générateur. Écrire la matrice de u dans la base B associée.

b. Montrer que, si u est cyclique, alors son polynôme minimal est son polynôme caractéristique.

c. On suppose ici u nilpotent. Montrer que u est cyclique si et seulement s'il est nilpotent d'indice n.

d. On suppose ici que u a n valeurs propres distinctes. Montrer que u est cyclique ; on pourra prendre $x = x_1 + x_2 + \cdots x_n$ où les x_i sont des vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres.

21. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\quad \forall v \in \mathcal{L}(E) \quad f(v) = u \circ v$.

a. Montrer que $\quad \mathrm{Sp}\, f \subset \mathrm{Sp}\, u$.

b. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$ et E_λ le sous-espace propre associé ; soit v un projecteur sur E_λ. Montrer que v est vecteur propre de f. En déduire que $\mathrm{Sp}\, f = \mathrm{Sp}\, u$.

c. Si E_λ et Δ_λ sont les sous-espaces propres associés à une même valeur propre λ pour u et f respectivement, on admet que $\quad \dim \Delta_\lambda = n \dim E_\lambda$.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

d. Montrer que u et f ont le même polynôme minimal.

22. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

a. Montrer que $\quad \forall k \in N \quad u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

b. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\Phi(f) = f \circ v - v \circ f$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

c. Montrer que u est nilpotent, puis que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

d. On suppose désormais qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\quad \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

e. Montrer que $\mathrm{Mat}_e(v)$ est triangulaire supérieure, de la forme $\begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ & a-1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & a-n+1 \end{pmatrix}$.

23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

a. Montrer que $\mathrm{Id}_E + h \in \mathrm{GL}(E)$.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ h = h \circ f$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow f + h \in \mathrm{GL}(E)$.

24. a. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose $\det f \neq 0$, et f^2 diagonalisable ; montrer que f est diagonalisable.

b. On suppose maintenant $\det f = 0$, $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$ et f^2 diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

Espaces euclidiens

25. Montrer que le système $\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0 \end{cases}$ définit un sous-espace F de $\mathbb{R}^4$.

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Déterminer une base orthonormée de F, puis de $F^\perp$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F. Calculer la distance à $F^\perp$ du vecteur $(1,2,3,4)$.

26. Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

a. Montrer brièvement que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. On orthonormalise la base $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ par le procédé de Gram-Schmidt ; soit $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base obtenue. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \deg H_k = k$.

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_p$ les éventuelles racines d'ordre impair de H_k situées dans $]0,1[$. Soit finalement $S = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$, avec $S = 1$ si H_k n'a pas de racine d'ordre impair dans $]0,1[$.
Montrer sans calculs que, si $p \neq k$, alors $(S|H_k) = 0$.

d. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, H_k a k racines simples, toutes situées dans $]0,1[$.

27. Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $p \geqslant 2$; soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad i \neq j \Longrightarrow (e_i|e_j) < 0$$

a. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$; soient λ_i et λ_j deux réels. Comparer $\lambda_i\lambda_j(e_i|e_j)$ et $|\lambda_i|\,|\lambda_j|(e_i|e_j)$.

b. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$. Comparer $\left\|\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i\right\|^2$ et $\left\|\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i|\, e_i\right\|^2$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i = 0_E \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i = 0_E$$

c. Montrer que toute sous-famille de $(e_1, \dots, e_p)$ de cardinal $p-1$ est libre.

28. a. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire ; soit $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto x - 2(u|x)u$.
Montrer que f est un endomorphisme orthogonal ; préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

On suppose désormais $n = 3$; on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$.

c. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\big((1,-1,0)\big)$.

d. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme associé.

29. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux. On pourra s'intéresser au signe de $q(t) = \|x+ty\|^2 - \|u(x+ty)\|^2$, où $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

30. Soit E un espace euclidien de dimension $2n$. Soient F et G deux sous-espaces de dimension n de E, tels que $E = F \oplus G$; on note p (respectivement q) la projection sur F de direction G (respectivement sur G de direction F).
Soit φ une isométrie vectorielle de E, telle que $\varphi(F) \subset G$. On pose $f(x) = \varphi\big(p(x)\big) + \varphi^{-1}\big(q(x)\big)$ pour tout $x \in E$.

a. Montrer que $\varphi(F) = G$. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, $f(F) = G$ et $f(G) = F$.

b. On suppose que $\forall (x, y) \in F^2 \quad \big(\varphi(x) \,|\, y\big) = \big(x \,|\, \varphi(y)\big)$. Montrer que f est une isométrie.

c. Établir la réciproque du résultat prouvé en **b**.

31. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$, et $H = (\mathrm{Vect}\, u)^\perp$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à H.

a. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale, et préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que f commute avec s si et seulement si u est vecteur propre de f.

c. Quelles sont les isométries qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{O}(E)$?

32. *(ENSEA MP)* Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$; soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe B symétrique réelle, à valeurs propres positives, telle que $B^2 = A$.

b. Montrer que $\big|\mathrm{tr}(AU)\big| \leqslant \mathrm{tr}\, A$.

Analyse élémentaire

33. *(IMT MP)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

34. *(IMT MP)* Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

35. *(TPE MP)* Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

Espaces vectoriels normés

36. *(IMT MP)* Soient E un espace vectoriel normé, A un ouvert de E et B une partie quelconque.

a. Montrer que $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$.

b. Donner un contre-exemple dans le cas où A n'est pas un ouvert.

37. Soit E l'espace des suites réelles bornées, et F le sous-espace de E constitué des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant de plus $u_0 = 0$.
Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $N_{infty}(u) = \sup\{|u_n|; n \in \mathbb{N}\}$ et $N(u) = \sup\{|u_{n+1} - u_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

a. Montrer que N_∞ est une norme sur E et que N est une norme sur F ; est-ce une norme sur E ?

b. Déterminer une constante C telle que $N \leqslant C N_\infty$.

c. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite $u^p = (u^p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $\displaystyle u_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{p+j}$ si $1 \leqslant k \leqslant p$, et $u^p_k = u^p_p$ si $k \geqslant p + 1$.
Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u^p \in F$.
Montrer que la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour N, mais pas pour N_∞. Qu'en déduit-on pour ces deux normes ?

38. **a.** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact d'intérieur vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

39. Soit E un espace préhilbertien réel. On dit qu'une suite (u_n) de vecteurs de E converge fortement vers le vecteur u si elle converge au sens usuel, c'est-à-dire si $\|u_n - u\|$ a pour limite 0. On dit qu'elle converge faiblement vers u si $\forall x \in E \quad (u_n - u \,|\, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

a. Montrer que l'on a unicité de la limite pour la convergence faible.

b. Montrer que la convergence forte entraîne la convergence faible ; montrer que la réciproque est vraie en dimension finie.

c. Montrer que l'on a équivalence entre les énoncés :

i. (u_n) converge fortement vers u ;

ii. (u_n) converge faiblement vers u et $\|u_n\|$ tend vers $\|u\|$.

Suites et séries numériques

40. *(CCP PSI)*

a. Montrer que, si $n \geqslant 3$, l'équation $e^x = nx$ a deux solutions réelles x_n et y_n vérifiant $0 < x_n < y_n$.

b. Étudier le sens de variation des suites (x_n) et (y_n). En déduire qu'elles ont chacune une limite, que l'on déterminera.

c. Montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$, puis déterminer un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$.

d. Montrer que $y_n \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

41. *(ENSEA MP)* Discuter suivant les valeurs de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la convergence de la série de terme général $u_n = (n^2+n+1)^{1/2} - (n^3+an^2+bn+c)^{1/3}$.

42. *(IMT MP)* Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln k$. Déterminer un équivalent de S_n ; la série $\sum_{n\geqslant 2}(1/S_n)$ est-elle convergente ?

43. *(IMT MP)* Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+\cos n}$

a. par développement asymptotique du terme général ;

b. en étudiant $\displaystyle\sum \left(\frac{(-1)^n}{n+\cos n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$;

c. en montrant que le critère des séries alternées s'applique.

44. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$; on pourra poser $v_n = n^{b-a}u_n$.

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a. Soit (ε_n) une suite de limite 0. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n\varepsilon_n}{n\sqrt{n}}$.

b. On admet que, pour tout $k \geqslant 1$, $|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| = -\ln\left(1 + \dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\right)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant 1/2$. En déduire que $|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

c. La série $\sum \ln(U_k)$ est-elle alternée ? Satisfait-elle les conditions permettant de dire qu'elle converge ?

d. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire la nature de la série $\sum \ln(U_k)$.

Intégration

46. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+u)^\alpha - u^\alpha}{u^\beta}\,du$.

a. Déterminer les valeurs de (α,β) pour lesquelles I_1 est définie.

b. Déterminer les valeurs de (α,β) pour lesquelles I_2 est définie.

c. Dans le plan muni d'un repère, avec α en abscisse et β en ordonnée, tracer l'ensemble des points (α,β) pour lesquels I_1 et I_2 sont toutes les deux définies.

Intégrales dépendant d'un paramètre

47. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\tan t)^n\,dt$.

a. Étudier le sens de variation de la suite (I_n) ; déterminer sa limite.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.

c. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

48. *(IMT MP)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

a. Calculer I_0, I_1 et I_2.

b. Déterminer la limite I de la suite (I_n).

c. Déterminer un équivalent de $I_n - I$ quand n tend vers $+\infty$.

49. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $f_n : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

a. Justifier l'existence de J_n pour tout n. Déterminer la limite de la suite (J_n).

b. Calculer f_n'. En déduire un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

c. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum J_n x^n$. Exprimer sa somme sous forme d'une intégrale.

50. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.

b. Montrer que $\forall x \in D \quad f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}\,du$.

c. En utilisant les fonctions $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{x+u}\,du$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}\,du$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $-\ln x$ en 0^+.

d. Montrer que $\forall x \in D \quad \forall u \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+u} \leqslant \dfrac{u}{x^2}$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

51. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de F. La fonction F est-elle de classe C^1 sur D ?

b. Pour $x > 0$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+x^2}\,dt$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2}\,dt$. Que vaut $F(1)$?

c. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in D$.

52. *(ENSEA MP)* Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Exprimer f', puis f à l'aide des fonctions usuelles.

c. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

53. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$. On donne d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$.

b. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\forall x > 0 \quad F'(x) = \dfrac{2}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

d. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $F'' - F$ y est constante.

e. Déterminer une expression simple de F.

Suites et séries de fonctions

54. *(IMT MP)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Quelle est la limite de la suite (I_n) ? La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

c. Soit $a > 0$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

55. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit (E_n) l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que (E_n) admet une et une seule solution dans $[0,1]$; on la note a_n.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; en déduire un équivalent de a_n.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto a_n \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$. Soit $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Déterminer le domaine de définition D de S.

d. Montrer que S est continue sur D.

56. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et $Z(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Donner le domaine de définition de Z. Étudier la convergence normale et la convergence uniforme de la série $\sum u_n$.

b. Montrer que Z est continue et convexe sur $]1,+\infty[$. Expliciter la limite de Z en $+\infty$.

c. Montrer que $Z(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$. Tracer le graphe de Z.

57. *(IMT MP)* Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.

a. Justifier l'existence de I.

b. Exprimer I comme somme d'une série. Donner sa valeur, sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

58. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, soient $f_n : x \longmapsto \dfrac{2\text{sh}x}{e^{nx}-1}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

a. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n > 1$.

b. Soit $n > 1$; montrer que $I_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{sh}x\, e^{-knx}\,dx$.

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

59. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$. On admet $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

a. Donner le domaine de définition de f ; étudier son sens de variation.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$. Montrer que I est bien définie, et que $I = \dfrac{\pi^2}{12}$.

d. En déduire que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12x}$.

Séries entières

60. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le produit des chiffres de l'écriture décimale de n. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n x^n$.

61. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n k^{-a}$. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$, et étudier sa convergence pour $x = R$ et $x = -R$.
On pourra étudier successivement les trois cas $a > 1$, $a \in [0,1]$ et $a < 0$.

62. Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions :

a. $f : x \longmapsto \ln(1+x-2x^2)$;

b. $g : x \longmapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

63. Soit $f : x \longmapsto (\text{Arcsin}\, x)^2$.

a. Montrer que f est la somme d'une série entière sur $]-1,1[$.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'=2$.

c. En déduire son développement en série entière.

64. *(IMT MP)* Soit $p\in\mathbb{N}$; soit $S_p : t\in\mathbb{R}\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+n}{p}t^n$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
La série converge-t-elle pour $t=R$? Y a-t-il convergence normale sur $]-R,R[$?

b. Pour $t\in\,]-R,R[$, exprimer $(1-t)S_p'(t)$ en fonction de $S_p(t)$.
En déduire une expression simple de $S_p(t)$.

c. *(Variante plus simple)* Exprimer S_p' en fonction de S_{p+1} ; retrouver ainsi l'expression de S_p.

65. Calculer **a.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$; **b.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser **a.**).

66. Soit $f : x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{x^{n+1}}{2n+2}\right)$.

a. Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x\in\,]-1,1[$.

b. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$; calculer $f(x)$ pour $x\in\,]-1,1[$.

c. La fonction f est-elle définie en 1 ?

d. Pour $p\in\mathbb{N}$, on pose $u_p=\displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1}\frac{1}{k}$. Pour tout p, encadrer u_p à l'aide d'intégrales ; en déduire la limite de la suite (u_p).

e. Calculer $f(1)$.

67. **a.** Déterminer le rayon de convergence R de $S(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$. La série converge-t-elle pour $x=R$? pour $x=-R$?

b. Déterminer la limite de $S(x)$ en 1^-.

c. Montrer que $(1-x)S(x)$ tend vers 0 en 1^-.

Équations différentielles

68. Les deux questions doivent être traitées de manière indépendante.
Soit (E) l'équation différentielle $xy'+2y=\dfrac{1}{1+x}$.

a. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

b. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$. Déterminer les solutions sur $]0,+\infty[$ admettant une limite finie en 0.

69. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=1+\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt$.

a. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer f.

70. On étudie l'équation différentielle (E) : $y''+\dfrac{2}{t}y'+y=0$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que f : $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{t}$ est solution de (E) sur I.

b. Déterminer une solution g sur I, linéairement indépendante de f, en utilisant le wronskien.

71. *(ENSAM PSI)* Soit $X : t\longmapsto\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, solution du système différentiel (Σ) : $x'=z$, $y'=2z$, $z'=x+y+2z$. Comment choisir $X(0)$ pour que la fonction X soit bornée sur $[0,+\infty[$? bornée sur $\mathbb{R}$?

Fonctions de plusieurs variables

72. *(IMT MP)* Déterminer les extremums éventuels de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 + 3xy - 15x - 12y$.

73. On travaille dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel. Soient f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives, et $u \in \mathbb{R}^n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\quad g(x) = \big(f(x)\,|\,x\big) - \big(u\,|\,x\big)$.

a. Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$; montrer qu'elle admet des dérivées partielles en tout point, les préciser.

b. Montrer que g admet un unique point critique z, que l'on déterminera.

c. Montrer que g admet un minimum global en z.

Probabilités

74. Les coefficients d'une matrice aléatoire $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$, et sont mutuellement indépendants. Les coefficients de M^2 sont-ils indépendants ?

75. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que, pour k suffisamment grand, $\quad P(X \geqslant k) \leqslant P(X = k)\dfrac{k+1}{k+1-\lambda}$. En déduire que $\quad P(X \geqslant k) \underset{k\to+\infty}{\sim} P(X = k)$.

76. *(CCP PSI)* Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n\,dt$. $\quad$ En déduire un équivalent de $\quad \displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n\,dt$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Soit G_X la fonction génératrice de X. Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$. En déduire la probabilité que X soit pair.

c. La variable Y, indépendante de X, suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Déterminer la probabilité que XY soit pair.

77. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble Ω des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_k par : pour tout $\sigma \in \Omega$, $X_k(\sigma) = 1$ si k est un point fixe de σ, et $X_k(\sigma) = 0$ sinon.
Enfin, on note N la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire.

a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quelle loi suit la variable X_k ? Donner $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

b. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

c. Exprimer N à l'aide des X_k. En déduire $E(N)$ et $V(N)$.

78. (*IMT MP*) Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants vaut $p_n = \dfrac{2^n a}{n!}$. On considère que la probabilité qu'un enfant soit une fille ou un garçon est la même.

a. Calculer a.

b. Quelle est la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon ?

c. Une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité qu'elle ait exactement deux enfants ?

79. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire p simultanément. Soient X et Y les variables aléatoires donnant respectivement le plus grand et le plus petit des numéros tirés.

a. Montrer que $\quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$.

b. **i.** Quel est le nombre de tirages différents ?

ii. En déduire que, pour $k \in [\![p, n]\!]$, $\quad P(X = k) = \dfrac{p}{n!}\,\dfrac{k!(n-p)!}{k(k-p)!}$.

iii. Déterminer l'espérance de X.

c. Déterminer la loi de Y ; en déduire que $\quad E(Y) = \dfrac{n+1}{p+1}$.

80. *(IMT MP)* On dispose d'une pièce donnant "pile" avec une probabilité $p \in \,]0, 1[$. Dans un premier temps, on lance la pièce jusqu'à obtenir "pile" ; on note N le nombre de lancers nécessaire. On lance ensuite N fois la pièce, on note X le nombre de "pile" obtenus.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer $E(X)$.

81. On lance une pièce qui donne pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ jusqu'à l'obtention de deux face (pas forcément consécutifs).

On note n le nombre d'occurrences de pile avant d'obtenir deux face et X la variable aléatoire associée.

On place ensuite dans une urne $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On tire une boule dans cette urne et on note Y la variable aléatoire associée a son numéro.

a. Déterminer la loi de X et son espérance.

b. Déterminer la loi de Y et son espérance.

c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

82. On donne n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sur un même espace probabilisé, de même espérance m et de même variance σ^2. On suppose de plus qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on ait $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = r\sigma^2$. On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a. Exprimer $V(\overline{X})$ en fonction de n, σ et r.

b. Calculer $E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2\right)$.

c. Montrer que $\dfrac{-1}{n-1} \leqslant r \leqslant 1$.

83. **a.** On lance une pièce de monnaie équilibrée une infinité de fois. On considère les événements P_k : "obtenir pile au k-ième lancer" et F_k : "obtenir face au k-ième lancer".

On note L_1 la variable aléatoire comptant le nombre de lancers dans la première série de lancers identiques, et L_2 la variable aléatoire comptant le nombre de lancers dans la seconde série de lancers identiques. Par exemple, si la suite des lancers est $PPFFFP\dots$, alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 3$.

i. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(L_1 = j)$ en exprimant l'événement $(L_1 = j)$ à l'aide des P_i et F_i.

ii. Calculer G_{L_1}, la fonction génératrice de L_1 ; en déduire l'espérance de L_1.

iii. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(L_2 = k)$; L_2 suit-elle la même loi que L_1 ?

b. Dans cette question, on effectue seulement n lancers consécutifs, avec $n \geqslant 2$; L_1 est toujours définie de la même manière, mais L_2 n'est pas forcément définie.

i. Calculer $P(L_1 = n)$, et $P(L_1 = j)$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$.

ii. Calculer $\sum_{j=1}^{n-1} jx^j$.

iii. Calculer $E(L_1)$ en fonction de n.

84. On considère la série entière $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} x^n$.

a. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de cette série entière.

b. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la fonction génératrice G_X est de la forme aS, où $a \in \mathbb{R}$.

Calculer a, puis préciser la valeur de $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Indications

1. c. Le produit vient du coefficient de X.
2. a. Exprimer la somme des carrés en fonction de $\alpha+\beta+\gamma$ et $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, et utiliser les relations entre coefficients et racines. Pour les cubes, $\alpha^3=-\alpha-1$. **b.** Si $X^4=PQ+R$, alors $\alpha^4=R(\alpha)$.
5. b. Utiliser **a**. **c.** Étudier la dimension de $\operatorname{Ker} u$; puis utiliser **a**, et compléter judicieusement la famille.
6. a. Soustraire une colonne à toutes les autres. **b.** Commencer par le cas $a\neq b$; puis passer à la limite pour le cas $a=b$.
7. b. On peut se ramener à un déterminant de Vandermonde par combinaison des colonnes. **c.** Attention, les T_k ne sont pas unitaires.
8. a. Chercher les racines communes à P_n et P_n'. **b.** Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} en décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes, dont l'une est composée de 1 ; étudier ensuite $(v_n)=\big(\Delta_n/(z_1z_2\cdots z_n)\big)$; utiliser enfin les relations entre coefficients et racines.
9. a. Noter que $-1\equiv 1$ [2]. **b.** Montrer qu'aucune valeur propre n'est d'ordre n, et utiliser **a.**
10. En cas de valeur propre multiple, le sous-espace propre doit avoir la bonne dimension.
12. a. Déterminer le noyau. **b.** $B=A+15I_3$. **c.** Les valeurs propres de B sont racines du polynôme minimal.
13. c. Un vecteur propre commun doit avoir ses quatres coordonnées égales ou opposées ; les chercher avec ±1 comme coordonnées.
14. b. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et que la racine trouvée en **a** est valeur propre d'ordre impair ; on utilisera le fait que A est à coefficients réels.
18. La matrice A est diagonalisable, et la condition sur la famille montre qu'elle n'a pas de polynôme annulateur de degré $n-1$ ou moins. Qu'en déduit-on sur ses valeurs propres ?
20. b. Montrer que le degré du polynôme minimal est au moins n, en considérant l'image d'un u-générateur par $P(u)$.
21. d. Commencer par exprimer $f^k(v)$ pour tout k et tout v.
22. c. Étudier les valeurs propres de Φ.
23. a. Trigonaliser h. **b.** Les deux implications disent la même chose, avec $-h$ à la place de h.
24. a. Un polynôme annulateur de f^2 fournit un polynôme annulateur de f. **b.** Reprendre le polynôme précédent, et appliquer le lemme des noyaux.
26. c. H_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. **d.** Montrer que SH_k garde un signe constant sur $]0,1[$.
27. c. Utiliser **b**, puis prendre le produit scalaire avec le dernier vecteur.
28. d. Déterminer B telle que $A=I_3-B$ et se raccrocher au **a.**
30. a. Noter que φ est un isomorphisme, et que $\varphi^{-1}(G)=F$. **b.** Développer $\|f(x)\|^2$, en notant que $\varphi^{-1}(q(x))\in F$. **c.** Si $(x,y)\in F^2$, reprendre le calcul du **b.** appliqué à $\|f(x+\varphi(y))\|$.
32. b. Interpréter $\operatorname{tr}(AU)$ comme le produit scalaire $(B\,|\,BU)$, pour le produit scalaire usuel défini par $(M|N)=\operatorname{tr}({}^tMN)$.
33. Poser $y=x-1$, reconnaître des identités remarquables.
34. Se ramener au cas $f(0)=0$. Noter que f est continue, puis a un signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.
35. C'est une somme de Riemann ; Vérifier que la fonction concernée a les bonnes propriétés ; puis poser $u=1/t$.
36. a. Utiliser : $x\in\overline{C}$ si et seulement si toute boule ouverte de centre x rencontre C.
37. c. Calculer $N(u^p)$ et $\lim N_\infty(u^p)$.
38. Pour la densité et l'intérieur vide, considérer des matrices de la forme $A+\lambda I_n$.
39. a. Si la suite a deux limites u et u', montrer que $(u-u'|x)=0$ pour tout x. **b.** Pour la réciproque, prendre pour x les vecteurs d'une base orthonormée. **c.** Pour **ii.** $\Longrightarrow$ **i.**, exprimer $\|u_n-u\|^2$ en fonction de $\|u_n\|$, $\|u\|$ et $(u_n-u|u)$.
40. b. Pour les limites, écrire $x_n=e^{x_n}/n$ (respectivement $y_n=\ln n+\ln y_n$), puis majorer e^{x_n}. **c.** Pour le deuxième terme, écrire $x_n=1/n+\varepsilon_n/n$, et en déduire un développement de e^{x_n} ; remplacer dans $x_n=e^{x_n}/n$.
42. Justifier que $k\ln k$ est équivalent à $\int_k^{k+1} t\ln t\,dt$.
43. c. Penser à utiliser l'inégalité des accroissements finis.
44. Étudier $\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$.
46. Commencer par discuter suivant le signe de β pour I_1, le signe de α pour I_2.
47. c. Utiliser la relation du **b** et la monotonie pour encadrer I_n.
48. c. Écrire I_n-I sous forme d'une intégrale, puis poser $u=t^n$.
49. b. Pour l'équivalent, exprimer f_n' en fonction de f_n, intégrer sur $\mathbb{R}_+$ et passer à la limite.

50. c. Montrer que les deux fonctions données ont une limite finie en 0. **d.** En intégrant l'encadrement, montrer que $f(x) - 1/x = o(1/x)$.
51. b. Poser $u = 1/t$. **c.** Exprimer $F(x)$ en fonction de $F(1)$ à l'aide d'un changement de variable.
52. b. Pour l'expression de f, attention au signe de x.
53. a. Poser $u = xt$. **c.** Intégration par parties. **d.** Pour simplifier $F'' - F$, effectuer l'intégration par parties "inverse" de la précédente.
55. b. remplacer x par ces deux valeurs dans (E_n) et déterminer le signe du nombre obtenu. **d.** Montrer la continuité sur les segments inclus dans D.
56. a. On a convergence normale sur $[a, +\infty[$ pour $a > 1$. Pour la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$, penser au théorème sur la limite d'un somme. **b.** Pour la convexité, commencer par prouver que les fonctions u_n sont convexes. **c.** Encadrer $Z(x)$ à l'aide d'intégrales.
58. b. Développer $1/(1-e^{-nx})$ à l'aide de la série géométrique. **c.** C'est I_2, qui se calcule très facilement ; on y arrive aussi par télescopage.
59. d. Utiliser la comparaison série-intégrale.
60. Majorer le nombre de chiffres de n à l'aide de $\log n$ (logarithme décimal) pour obtenir $R \geqslant 1$.
61. Dans les trois cas, on peut utiliser d'Alembert.
62. a. Factoriser $1 + x - 2x^2$. **b.** Dériver.
63. b. Écrire une relation entre ${f'}^2$ et f, puis dériver.
65. a. Classique : on connaît $\sum(-1)^n x^n/n$ pour $x \in]-1, 1[$, et le TSSA montre que la série converge uniformément sur $[0, 1]$, donc que sa somme est continue en 1. **b.** Même principe en plus simple, puisque la convergence est normale sur $[-1, 1]$.
66. e. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$ en fonction des sommes partielles H_k de la série harmonique, puis à l'aide de u_p.
67. b. Minorer $S(x)$ au voisinage de 1, en utilisant des sommes partielles de la série $\sum \sin(1/\sqrt{n})$. **c.** Réécrire $(1-x)S(x)$ sous forme d'une série entière, et montrer que cette dernière série converge normalement sur $[0, 1]$.
69. a. Développer $\cos(x - t)$. **b.** Calculer f'', en déduire une équation différentielle vérifiée par f.
70. b. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par le wronskien w de f et g, et noter que w/f^2 est une dérivée simple.
72. Déterminer le point critique (x_0, y_0), puis étudier $f(x_0 + u, y_0 + v)$.
73. a. Utiliser la définition de la différentiabilité ; puis déterminer le gradient, en utilisant la symétrie de f.
74. Étudier la probabilité d'avoir coefficient égal à n.
76. a. Raisonner par récurrence et intégrer par parties.
78. b. Commencer par calculer la probabilité d'avoir un garçon, sachant que la famille a n enfants, où n est fixé.
79. c. Puisque $k \longmapsto n + 1 - k$ est une bijection décroissante de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, Y suit la même loi que $n + 1 - X$.
80. a. Calculer $P(X = k|N = n)$, puis probabilités totales. Il faut reconnaître le DSE de la dérivée k-ième de $x \longmapsto 1/(1 - x)$.
81. b. Commencer par calculer $P(Y = k|X = n)$.
82. b. Développer le carré, et noter que $E(\overline{X}) = E(X_1)$. **c.** $V(\overline{X})$ et l'espérance du **b** sont positifs.
83. a.iii. Calculer $P((L_2 = k) \cap (L_1 = j))$ pour tout j.