

Algèbre générale

1. Soient G et H deux groupes cycliques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $G \times H$ soit cyclique.
2. Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n^{13} \equiv n \pmod{42}$.
3. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varphi(n)$ divise n , où φ désigne l'indicatrice d'Euler.
4. Soit $n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \exp(2ik\pi/n)}$.
5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, tel que $P(0) = 1$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in \mathbb{C} \quad |z| < \varepsilon$ et $|P(z)| < 1$.
6. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $n(z)$ le nombre de solutions **distinctes** dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(x) = z$; par exemple, si $P = (X - 2)^2$, alors $n(0) = 1$, car l'équation $P(x) = 0$ a une seule solution, 2. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z))$.
7. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
 - a. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
 - b. Étudier le signe de $P(x)P''(x) - P'(x)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - c. Pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, majorer $a_k a_{k+2}$ à l'aide de a_{k+1} .

Algèbre linéaire élémentaire

8. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad (BA = 0 \implies AB = 0)$.
9. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Soit $A = (a_{jk}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{jk} = \omega^{(j-1)(k-1)}$ pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$; on note $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A . Calculer $A\overline{A}$, en déduire la valeur de $|\det A|$. Montrer que A est inversible, et préciser A^{-1} .
 b. Plus généralement, soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $B(\theta) = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $b_{jk} = \theta^{(j-1)(k-1)}$ pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour quelles valeurs de θ , $B(\theta)$ est-elle inversible?
10. a. Soit $n \geq 2$. Montrer que $X^n - X + 1$ a n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.
 b. On note $z_1, \dots, z_n$ ces racines. Calculer $\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}$.
11. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, vérifiant $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{\alpha_k x}$.
 Montrer que f s'annule au plus $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.
 b. Soit $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\beta_1 < \cdots < \beta_n$. Soit $M = (e^{\alpha_i \beta_j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det M > 0$.
12. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
 a. Montrer que $f^2 = 0 \iff \exists (g, h) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad f = h \circ g \text{ et } g \circ h = 0$.
 b. Déterminer g et h quand $E = \mathbb{K}^3$ et f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
13. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$; soit $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent et de rang $n-1$.
 a. Soit F un sous-espace de E stable par u . Montrer que $F = \{0_E\}$ ou $\text{Ker } u \subset F$.
 b. Soit $F \neq \{0_E\}$ un sous-espace stable par u ; montrer que $\dim u(F) = \dim F - 1$.
 c. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \dim \text{Ker } u^k = k$.
 d. Déterminer les sous-espaces stables par u .
14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on définit $\Phi_{U,V} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto U M V$.
 a. Si $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$, identifier $\Phi_{A,B} \circ \Phi_{C,D}$.
 b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{rg}(\Phi_{A,A})$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout couple (A, B) de matrices semblables, on ait $f(A) = f(B)$.
16. a. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Ker } A = \text{Im } A$ et $\text{Ker } B = \text{Im } B$. Montrer que A et B sont semblables.
 b. Soit $\Gamma = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = 0\}$. Montrer que Γ est une réunion de classes de similitude ; dénombrer ces classes.
17. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit G une partie finie et non vide de $\text{GL}(E)$, stable par composition. Soit $p = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g$.
 a. Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.
 b. Montrer que p est un projecteur d'image $F = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$. En déduire une expression de la dimension de F .

Réduction des endomorphismes

18. a. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$. Montrer que $\det A \neq 0$.
 b. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{kk} > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$. Montrer que $\det A > 0$.
19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.
20. Pour tout $n \geq 2$, soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $(A_n)_{i,j} = 1$ si $i \geq j$, $(A_n)_{1,n} = 1$, et tous les autres coefficients sont nuls.
 a. Pour tout $n \geq 2$, déterminer le polynôme caractéristique de A_n .
 b. Pour $n \geq 2$, montrer que A_n a une et une seule valeur propre dans $]1, +\infty[$; on la note λ_n .
 c. Montrer que $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2 \ln n}$.
21. Soient A et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que M soit nilpotente.
 a. On suppose $AM = 0$. Montrer que A et $A + M$ ont même polynôme caractéristique.
 b. Que dire si $MA = 0$?
22. Existe-t-il une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \varphi(A) \in \text{Sp}(A)$?
23. a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + AB)$.
 b. En déduire que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
 c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on note $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M . Montrer que $\det(I_n + M\overline{M}) \in \mathbb{R}$.
24. Soient E et F deux espaces de dimension finie sur $\mathbb{K}$; soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. Montrer que, si $\dim E = \dim F$, alors $\text{Sp}(u \circ v) = \text{Sp}(v \circ u)$.
 Que peut-on dire si $\dim E \neq \dim F$?
25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soient $A = X^n - X$ et $B = X^n - 1$. On note φ l'application qui, à un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .
 a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Déterminer son noyau et son image.
 b. Déterminer les valeurs propres de φ ; est-il diagonalisable ?
26. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $L(P) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt$. On identifiera polynômes et fonctions associées.
 a. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 b. Soit $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$. Montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels, dont on précisera la valeur, telle que $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad L(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k(P)$.
 c. Déterminer les éléments propres de L .
 d. Quels sont les endomorphismes qui commutent avec L ?
27. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient f, g, h_1 et h_2 des endomorphismes de E vérifiant $f \circ h_1 = h_1 \circ g$, $f \circ h_2 = h_2 \circ g$ et $\text{Ker } h_1 \cap \text{Ker } h_2 = \{0_E\}$.
 Montrer que, si f est diagonalisable, alors g l'est aussi.

28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. On note G_M l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que λM soit semblable à M .
- Quelle est la structure de G_M ?
 - Montrer que, si M n'est pas nilpotente, alors G_M est fini.
 - Déterminer G_M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Que se passe-t-il si $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$?
29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.
30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On suppose que M^2 est diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M le soit aussi.
 - Soit $a \in \mathbb{C}$. On suppose $M^2 + aM$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M le soit aussi.
31. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A - A^{-1}$ l'est.
32. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^n = I_n$ et $\text{tr } M = n$.
33. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^3 + f^2 - \text{Id} = 0$ et $\text{tr } f \in \mathbb{Q}$.
34. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = \sum_{k=0}^q a_k X^k$ son polynôme minimal. On pose $p = \min\{k \in \llbracket 0, q \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$.
- Montrer que $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$.
 - On suppose $p > 0$. Montrer que p est le plus petit des entiers $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $E = \text{Ker } u^k \oplus \text{Im } u^k$.
35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que la matrice $P'(A)^2 - P(A)P''(A)$ est inversible.
36. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.
- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant $AX = XB$. Montrer que $X = 0$.
 - Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad AX - XB = M$.
 - Déterminer le spectre de l'endomorphisme $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XB$.
37. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Comparer $\text{Ker } N$ et $\text{Ker}(\exp(N) - I_n)$.
38. Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = \lambda I_n + N$.
39. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on pose $\sin A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$.
- Justifier l'existence de $\sin A$.
 - Peut-on choisir A de manière à avoir $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2017 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Espaces euclidiens

40. Soit E un espace euclidien de dimension n . On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E est obtusangle si $(u_i | u_j) < 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille obtusangle.
- Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\|\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i\| \leq \|\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i\|$.
 - En déduire que $p \leq n + 1$.
 - Montrer qu'il existe une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de cardinal $n + 1$, vérifiant $(u_i | u_j) = -1/n$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.
41. Soit (a, b) une famille libre de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension 2.
- Montrer qu'il existe une base orthonormée (u, v) et $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifiant $a = \|a\|[(\cos \alpha)u + (\sin \alpha)v]$ et $b = \|b\|[(\cos \alpha)u - (\sin \alpha)v]$.
 - Soit $C = \left\{ \frac{(a|x)(b|x)}{\|x\|^2} ; x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$. Déterminer $\inf C$ et $\sup C$.

42. Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \left[\int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt \right]^{1/2}$.
- Montrer que N est une norme euclidienne; on note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire associé.
 - Soient $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que $E = V \oplus W$, puis que $W = V^\perp$.
 - Soit $G = \{f \in E \mid f(0) = 1 \text{ et } f(1) = e\}$. Calculer $\inf\{N(f) ; f \in G\}$.
43. Soit E l'espace des fonctions continues, paires et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $(f|g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t) dt$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $e_0(t) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n(t) = \sqrt{2} \cos(nt)$.
- Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E ; on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
 - Soient $f \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in [0, \pi]$, on ait $|f(t) - P_n(\cos t)| \leq \varepsilon$.
 - Soit $f \in E$. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_k = (e_k | f)$ et $S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt)$. Montrer que $\|f - S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
44. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'endomorphisme canoniquement associé à A est une isométrie?
45. a. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tels que ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = M^tM$. Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.
46. Les deux questions sont indépendantes. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On suppose que $A^tA = {}^tAA$ et $A^2 = -I_n$. Montrer que A est orthogonale.
 - On suppose que $A^2 = A^tA$. Montrer que A est symétrique.
47. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- Montrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$.
 - En déduire que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{ii} > 0$.
 - Montrer qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i_0 i_0} = \max\{|a_{ij}| ; (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}$.
48. a. Déterminer $\inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{tr } A)^2 \leq \lambda \text{tr}({}^tAA)\}$.
- b. Déterminer $\inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad |\det A|^{2/n} \leq \lambda \text{tr}({}^tAA)\}$.
49. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, pour toute matrice orthogonale P , la matrice tPAP est à diagonale nulle.
50. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice antisymétrique A telle que $S + A$ soit orthogonale.
51. Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E , ayant toutes leurs valeurs propres positives ou nulles.
- Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$, symétrique à valeurs propres positives, tel que $f = h^2$.
 - Montrer que $\det(f + g) \geq \det f$.
52. On munit $\mathbb{R}^n$, identifié à l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, du produit scalaire usuel. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A^p = {}^tA$. Soit $B = A^{p+1}$.
- Montrer que $B^p = B$, et que $(BX | X) = \|AX\|^2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
 - Que peut-on dire des valeurs propres de B ? Montrer que $B^2 = B$.
 - Comparer $\text{Ker } A$ et $\text{Ker } B$, puis $\text{Im } A$ et $\text{Im } B$.
 - Montrer que $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires orthogonaux, et que $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in \text{Im } A$.

53. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.
- Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
 - Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2 \quad AB = BA \implies \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $N(A) \leq \|A\|$.

Analyse élémentaire

54. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a . Soient (x_n) et (y_n) deux suites de limite a , telles que $x_n \neq y_n$ pour tout n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$.
On dira que la propriété (P) est vraie si (t_n) converge vers $f'(a)$.
- On suppose f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; montrer que (P) est vraie.
 - On suppose $x_n < a < y_n$ pour tout n ; montrer que (P) est vraie.
 - Montrer que (P) peut être fausse.
55. Soit $f : x \mapsto x^3 - \ln x$. Déterminer les intervalles sur lesquels f réalise une bijection. Dans chaque cas, donner un développement asymptotique à deux termes de la réciproque en $+\infty$.
56. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}}$. Montrer que $u_n = O(2^{n/2} \sqrt{n})$.
57. Soit f de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\|f'\|_\infty \leq \frac{2}{b-a} \|f\|_\infty + \frac{b-a}{2} \|f''\|_\infty$.

Espaces vectoriels normés

58. Si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k p_k|$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que N_a soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
 - Soient a et b deux suites réelles telles que N_a et N_b soient des normes; à quelle condition ces deux normes sont-elles équivalentes?
59. Soit E un e.v.n. de dimension finie, tel que $n = \dim E \geq 2$. Soit $S = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^2 = \text{Id}_E\}$. On dit que $v \in S$ est un point isolé de S s'il existe $r > 0$ tel que $S \cap B(v, r) = \{v\}$.
- Montrer que Id_E est un point isolé de S .
 - Déterminer tous les points isolés de S .
 - L'ensemble S est-il fermé? compact?
60. Soit R l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_2$.
- Montrer que toute matrice de R est diagonalisable.
 - Déterminer l'adhérence de R dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
61. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme; soit C l'ensemble des fonctions de E prenant leurs valeurs dans $[0, 1]$. On note I , S et B les ensembles de fonctions de C respectivement injectives, surjectives et bijectives.
- Montrer que I n'est ni ouvert, ni fermé.
 - Étudier le caractère ouvert ou fermé de S et B .
62. a. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 , telle que $\|f'\|_\infty < 1$. Montrer que f admet un et un seul point fixe dans $[a, b]$.
- b. Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E ; soit f une fonction de K dans lui-même, vérifiant $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tout couple $(x, y) \in K^2$ tel que $x \neq y$. Montrer que f admet un unique point fixe dans K .
- c. Soit C un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé E ; soit f une fonction de C dans lui-même, vérifiant $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout couple $(x, y) \in C^2$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans C .
63. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et φ une forme linéaire non nulle sur E .

- a. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E .
 - b. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est soit fermé, soit dense dans E .
 - c. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est fermé si et seulement si φ est continue.
64. Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\| \cdot \|$. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $N(u) = \sup\{\|u(x)\| ; x \in E, \|x\| \leq 1\}$.
- a. Montrer que N est bien définie, et que $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq N(u)\|x\|$.
 - b. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
 - c. Soit (u_k) une suite d'endomorphismes de E . Montrer que la suite (u_k) converge pour N , si et seulement si la suite de fonctions (u_k) converge simplement sur E .
65. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_A son polynôme caractéristique, et $S(A)$ sa classe de similitude, c'est-à-dire l'ensemble des matrices semblables à A .
- a. Montrer que l'application $A \mapsto \chi_A$ est continue.
 - b. Montrer que, si A est diagonalisable, alors $S(A)$ est fermé. Étudier la réciproque.
 - c. Montrer que, si A est nilpotente, alors $0 \in \overline{S(A)}$. Étudier la réciproque.
 - d. Caractériser les matrices A pour lesquelles $S(A)$ est borné.

Suites et séries numériques

66. On définit une suite réelle (u_n) par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 3u_n - 3$.
- a. Déterminer les limites réelles possibles de la suite.
 - b. Déterminer l'ensemble A des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est bornée. Si $u_0 \notin A$, quel est le comportement de la suite?
 - c. On suppose que u_0 est intérieur à A , et que la suite converge. Quelle est sa limite?
67. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.
Donner un équivalent de u_n , puis un développement asymptotique à deux termes.
68. On définit une suite réelle (u_n) par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
Déterminer la limite de la suite. En donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes.
69. a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, l'équation $e^x = x^n$ a exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+^*$. On note ces solutions u_n et v_n , avec $u_n < v_n$.
- b. Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n , et à deux termes de v_n .
70. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P'_n a une et une seule racine r_n dans $]0, 1[$. Donner la limite, puis un équivalent de r_n .
71. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la série $\sum a^{\lfloor \ln n \rfloor}$.
72. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$.
73. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = 2u_n + \frac{u_{n-1}}{n^2}$.
Montrer que u_n a un équivalent de la forme $C2^n$, où $C \in \mathbb{R}^*$.
74. Les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_0 = 1 + \frac{1}{3}$, $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$, $u_3 = -\frac{1}{4}$, $u_4 = \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$, $u_5 = -\frac{1}{6}$, etc.
- a. Donner une expression générale de u_n .
 - b. Justifier que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme. Donner un équivalent de ses restes.
75. Soit $\gamma \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^\gamma$.
- a. La suite (a_n) converge-t-elle?
 - b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = a_n + a_{n+1}$. Montrer que (b_n) converge vers une limite strictement positive.

- c. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.
76. a. Étudier la convergence de la série de terme général $a_n = \int_0^1 \cos(nt^2) dt$.
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin k$. Montrer que la suite (S_n) est bornée.
- c. Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n a_n$.

Intégration

77. Prouver la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^{3/2}} dt$, puis la calculer.
78. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite, et un équivalent quand x tend vers $+\infty$, de $\int_x^{2x} \operatorname{th}\left(\frac{e^{1/t}}{t^{\alpha+1}}\right) dt$.
79. a. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^x e^{it^2} dt$ admet une limite finie en $+\infty$; on note μ cette limite.
- b. Pour $x > 0$, montrer que $\mu - f(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt$. En déduire un équivalent de $\mu - f(x)$ en $+\infty$.
80. Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$.
- a. Tracer les courbes représentatives de F et F^{-1} .
- b. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis un équivalent de $F^{-1}(y)$ quand y tend vers $+\infty$.
- c. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n vérifiant $F(u_n) - F(n) = 1$. Donner la limite et un équivalent de u_n .
81. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose trouvé $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt$ converge. Montrer que, pour tout $s > s_0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ converge.
82. Soient $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$ et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
- a. Justifier la convergence de I .
- b. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.
- c. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
- d. En déduire la valeur de I .
83. a. Soit $I : s \in \mathbb{R} \mapsto \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{t(t-s)}} dt$. Déterminer le domaine de définition D de I .
- b. La fonction I est-elle continue sur D ? de classe C^1 sur D ?
- c. Déterminer un équivalent de $I(s)$ quand s tend vers 1.
84. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, telle que f et $(f')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f a pour limite 0 en $+\infty$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

85. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{ne^{-t}}{1+nt} dt$. Donner un développement asymptotique à deux termes de J_n ; on ne cherchera pas à calculer l'intégrale apparaissant dans le deuxième terme.
86. Soit $s : t \mapsto t - [t]$. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{s(t)}{t(t+x)} dt$.
- a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f a pour limite 0 en $+\infty$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{s(t)}{t} dt$; on pourra noter que s est 1-périodique.
- En déduire que $f(n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right)$.
- c. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(n)$ pour n entier, puis de $f(x)$ pour x réel.

87. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.
88. a. Déterminer le domaine de définition D de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.
 b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D ; étudier ses variations.
 c. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en chaque borne de D .

Suites et séries de fonctions

89. Soit $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nt)}$.
 a. Montrer que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
 b. Déterminer la limite et un équivalent de $S(t)$ en 0 et en $+\infty$.
90. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+t}}$.
 a. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
 b. Trouver un équivalent de $f(t)$ en 0.
 c. Trouver un équivalent de $f(t)$ en $+\infty$.
91. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^t \ln n}$.
 a. Déterminer le domaine de définition de f ; montrer qu'elle est de classe C^∞ sur ce domaine.
 b. Déterminer la limite, puis un équivalent simple, de $f(t)$, en chaque borne du domaine de définition.
92. Soit $q \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - q^k x)$.
 a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$; on note f sa limite.
 b. Montrer que f est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 1$ et $f(x) = (1 - qx)f(qx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 c. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
93. On admet $\forall t \in [-\pi, \pi] \quad t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2}$ et $\forall t \in]-\pi, \pi[\quad t = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(nt)}{n}$.
 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2 + a^2}$.
 a. Montrer que f est définie et de classe C^2 sur $[-\pi, \pi]$.
 b. Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par f . En déduire une expression simple de f .
 c. Déterminer $g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nt)}{n^2 + a^2}$.

Séries entières

94. Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif. On note R_2 le rayon de convergence de $\sum \sin(a_n) x^n$.
 a. Montrer que $R_2 \geq R_1$.
 b. Montrer que, si $R_1 > 1$, alors $R_2 = R_1$.
 c. Donner les valeurs possibles du rapport R_2/R_1 .
95. Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On suppose que les rayons de convergence R_a et R_b des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ respectivement, sont strictement positifs.
 a. On suppose $a_n \neq 0$ pour tout n . Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{a_n}$?

- b. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$?
96. a. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.
- b. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.
97. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$.
98. Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose d'autre part
- $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n ; \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n ; \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$
- a. Pour tout $x \in]-1, 1[$, calculer $f(x)$.
- b. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x)$.
- c. Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $h(x)$ en fonction de $g(x)$. Que vaut $h(-1)$? Donner un équivalent de $g(x)$ au voisinage de -1^+ .
99. Soit (a_n) une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, et on suppose que $A_n \sim n$ quand n tend vers $+\infty$.
- a. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum A_n x^n$ et $\sum a_n x^n$.
- b. Déterminer la limite en 1^- de $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
100. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]-1, 1[$. On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant de plus $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = af(x) + f(\lambda x)$.
- a. Déterminer les fonctions de E développables en série entière au voisinage de 0 ; quel est le rayon de convergence des séries obtenues ?
- b. Déterminer tous les éléments de E .
101. Soit $q \in]-1, 1[$. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n t)$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, et développable en série entière au voisinage de 0 ; on précisera le rayon de convergence de la série obtenue.

Équations différentielles

102. On considère l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' - 4ty' + (t^2 - 6)y = 0$.
- a. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
- b. Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?
103. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^3 y'' + xy' - y = e^{1/x}$.
104. Soient a et b deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et 1-périodiques. On suppose que l'équation différentielle $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admet une solution y_0 vérifiant $y_0(0) = y_0(1) = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad y_0(k) = 0$.
105. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soit $(E) : y'' + ay' + by = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (E) admette un système fondamental constitué d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
106. Soient q et f deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $q(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soit (E) l'équation différentielle $y'' - q(t)y = f(t)$; soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que (E) admet une et une seule solution vérifiant $y(0) = a$ et $y(1) = b$.
107. Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, monotone et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que toutes les solutions de l'équation $(E) : y'' + y = f$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Fonctions de plusieurs variables

108. Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
- Représenter graphiquement ces deux ensembles. Sont-ils ouverts ? fermés ?
 - Pour $(x, y) \in D$, on pose $f(x, y) = \frac{\ln(1 - xy)}{xy}$ si $(x, y) \notin \Delta$, et $f(x, y) = -1$ sinon. Montrer que f est de classe C^∞ sur D .
109. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.
- Étudier la continuité de f .
 - Étudier les extremums locaux de f .
110. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit h une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $h = a \frac{\partial h}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial y}$. Montrer que, si h est bornée sur $\mathbb{R}^2$, alors h est la fonction nulle.
111. a. Soit $U =]0, +\infty[^2$; soit $\varphi : (x, y) \in U \mapsto (y/x, x^2 + y^2)$. Montrer que φ réalise une bijection de U dans lui-même, et que φ et sa réciproque sont de classe C^∞ sur U .
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$ en posant $g = f \circ \varphi^{-1}$.
112. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, et de la norme associée. Soit φ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$; soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x) e^{-\|x\|^2}$. Déterminer les extremums de f .

Probabilités

113. Une personne P_1 reçoit un signe $+$ ou $-$. Elle le transmet à P_2 , qui le transmet à P_3 , et ainsi de suite jusqu'à une personne P_n , $n \geq 3$. A chaque transmission, le signe a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être inchangé, et $q = 1 - p$ d'être inversé. La personne P_1 reçoit le signe $+$; sachant que P_n a reçu le signe $+$, quelle est la probabilité que P_1 ait transmis son signe sans le changer ?
114. Une urne contient initialement $b > 0$ boules blanches et $r > 0$ boules rouges. On effectue une infinité de tirages successifs dans cette urne; après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, ainsi que $c \geq 0$ boules de la même couleur que la boule tirée.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit X_n la variable donnant le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages. Donner la loi de X_n .
 - Déterminer la limite de $P(X_n = 0)$ quand n tend vers $+\infty$. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir de boule rouge ?
 - Soit Y la variable donnant le rang d'apparition de la première boule rouge. Déterminer la loi de Y ; cette variable admet-elle une espérance ?
115. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \alpha \left(\frac{\beta^k + \gamma^k}{k!} \right)$.
- Pour quelles valeurs de (α, β, γ) peut-il exister une variable aléatoire X , à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?
 - Dans ce cas, X peut-elle suivre une loi de Poisson ?
116. Un démarcheur appelle r clients. À chaque appel, la probabilité que la personne appelée réponde est $p \in]0, 1[$. Il recommence ensuite en appelant les clients qui n'ont pas répondu, etc. Soit X la variable donnant le nombre d'appels nécessaire pour contacter tous les clients. Déterminer la fonction génératrice de X , son espérance et sa variance.
117. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Un restaurant contient une infinité de tables, chacune ayant une infinité de places. Le premier client qui arrive choisit une table au hasard. Pour $n \in \mathbb{N}$, le $(n+1)$ -ème client arrivé choisit une table indépendamment des clients précédents : il s'assoit à une table déjà occupée avec une probabilité $n/(n+\alpha)$, et à une table vide avec la probabilité $\alpha/(n+\alpha)$. Soit A_n la variable aléatoire donnant le nombre de tables occupées une fois que n clients sont installés. Pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $p_{n,k} = P(A_n = k)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $p_{n,1}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $p_{n+1,k}$ en fonction de $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$.

- b. Exprimer A_n comme une somme de variables de Bernoulli.
 - c. Calculer l'espérance et la variance de A_n . Déterminer un équivalent de $E(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$, et montrer que $V(A_n)$ a le même équivalent.
- 118.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $X \leq Y$, $P(Y = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = k | Y = n) = 1/n$. Soit $Z = Y - X + 1$.
- a. Comparer les lois de X et Z .
 - b.
 - i. On suppose que X suit une loi géométrique. Montrer que X et Z sont indépendantes.
 - ii. On suppose réciproquement que X et Z sont indépendantes ; montrer que X suit une loi géométrique.
 - c. On suppose que Y a une espérance finie. Montrer qu'il en est de même pour X , et exprimer $E(X)$ en fonction de $E(Y)$.
- 119.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, indépendantes et suivant la même loi. On suppose que $X + Y$ suit la même loi que $2X$. Montrer que X est presque sûrement constante.

Indications

1. Si m est le ppcm des cardinaux de G et H , alors $(g, h)^m = (e_G, e_H)$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, donc $G \times H$ ne peut être cyclique si $m \neq \text{Card}(G \times H)$.
2. Cela revient à dire que $n^{13} \equiv n$ modulo 2, 3 et 7.
3. Étudier le nombre de facteurs 2 au dénominateur de $n/\varphi(n)$.
4. Former un polynôme dont les racines sont les facteurs du produit, et utiliser les relations entre coefficients et racines.
5. Écrire $P(z) - 1 = az^q Q(z)$ avec $Q(0) = 1$, et choisir z tel que $az^q \in \mathbb{R}^*$.
6. $d - n(z)$ n'est différent de 0 que si l'équation $P(x) = z$ a une racine multiple a , donc seulement si $z = P(a)$, où a est une racine de P' . Relier alors $d - n(z)$ et l'ordre de la racine a dans P' (ou des racines s'il existe plusieurs tels a).
7. **b.** C'est le numérateur de la dérivée de P'/P ; décomposer P'/P en éléments simples. **c.** En utilisant le **b** en 0, on majore $a_0 a_2$; puis utiliser **a**.
8. Ce sont la matrice nulle et les matrices inversibles.
9. **a.** On doit trouver $A\bar{A} = nI_n$. **b.** Le déterminant est un Vandermonde.
10. **a.** Montrer que les racines de P' ne sont pas racines de P . **b.** Écrire la dernière colonne comme somme d'une colonne de 1 et d'une autre colonne pour obtenir une relation de récurrence. On obtient une expression qui peut s'exprimer à l'aide des coefficients du polynôme.
11. **a.** Récurrence sur n ; diviser par $e^{\alpha_1 x}$ puis dériver. **b.** Récurrence sur n : considérer le déterminant comme fonction de β_n , et développer par rapport à la dernière colonne.
12. **a.** Prendre pour h une projection sur $\text{Im } f$.
13. **a.** Si $x \neq 0_E$ est dans F , il existe k tel que $u^k(x) \in \text{Ker } u \setminus \{0_E\}$. **b.** Formule du rang appliquée à $u|_F$. **c.** Calculer $\dim \text{Im } u^k$ en utilisant **b**. **d.** Si F est stable de dimension k , utiliser **b** pour montrer que $F \subset \text{Ker } u^k$.
14. **b.** Écrire $A = PJ_r Q$, et décomposer $\Phi_{A,A}$ en utilisant **a**.
15. Noter que, si $i \neq j$, alors E_{ii} est semblable à E_{jj} , et $E_{ii} + E_{ij}$ est semblable à E_{ii} .
16. Pour les deux questions, montrer que, si $A^2 = 0$ et $\text{rg } A = r$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$. Pour le dénombrement, noter que $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$ implique une condition sur le rang.
17. **a.** Si $g_0 \in G$, noter que $h \mapsto g_0 \circ h$ doit réaliser une bijection de G dans lui-même; en déduire successivement que Id_E , puis g_0^{-1} , appartiennent à G . **b.** Commencer par montrer $g \circ p = p$ pour tout $g \in G$.
18. **a.** Si $X \in \text{Ker } A$, considérer k tel que $|x_k|$ soit maximal. **b.** Montrer que les valeurs propres réelles de A sont strictement positives.
19. Montrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ a une seule racine réelle, qui est positive.
20. **a.** On trouve $(\lambda - 1)^n - \lambda^{n-2}$. **b.** Réécrire l'équation sous la forme $\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n = \frac{1}{\lambda^2}$. **c.** Montrer que λ_n tend vers $+\infty$, puis justifier successivement $\lambda_n \sim n/2 \ln \lambda_n$ et $\ln \lambda_n \sim \ln n$.
21. **a.** Écrire les matrices des endomorphismes associés, dans une base adaptée à une décomposition de la forme $E = \text{Ker } A \oplus F$; noter que $\text{Ker } A$ est en particulier stable par M . **b.** Passer aux transposées.
22. Étudier les images de $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{1,2} + E_{2,1}$ dans le cas $n = 2$; adapter dans le cas général.
23. **a.** Multiplier à droite par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix}$. **b.** Dans la matrice donnée en **a**, remplacer le premier bloc par λI_n , puis multiplier à gauche par la bonne matrice. **c.** Noter que $\overline{M}M$ est la matrice conjuguée de $M\overline{M}$.
24. Si x est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à $\lambda \neq 0$, montrer que $u(x)$ est vecteur propre de $u \circ v$ (penser à vérifier $u(x) \neq 0$); pour $\lambda = 0$, examiner les déterminants des matrices. Si $\dim E \neq \dim F$, prendre pour matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
25. **a.** Pour le noyau, noter que $A \wedge B = X - 1$; poser $A = (X - 1)A_1$, $B = (X - 1)B_1$, avec $A_1 \wedge B_1 = 1$. L'image est alors clairement incluse dans l'ensemble des multiples de $X - 1$. **b.** Pour qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul tel que $(A - \lambda)P = QB$, il faut que $A - \lambda$ et B aient une racine commune.
26. **b.** Appliquer la formule de Taylor pour les polynômes; on obtient $a_k = 1$ pour tout k . **d.** Si f commute avec L , il commute avec $L^{-1} : P \mapsto P - P'$, donc commute avec D . En étudiant les images des X^k , montrer que f est de la forme $\sum \lambda_k D^k$.
27. Montrer que $P(f) \circ h_1 = h_1 \circ P(g)$ pour tout polynôme P .

- 28. a.** C'est un groupe pour la multiplication. **b.** Le spectre de M doit être stable par $x \mapsto \lambda x$. **d.** Montrer que M est semblable à la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés immédiatement au-dessus de la diagonale principale, qui valent 1 ; puis que $G_M = \mathbb{C}^*$.
- 29.** Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.
- 30. a.** Un polynôme annulateur scindé à racines simples de M^2 donne un polynôme annulateur de M , où seul 0 peut être racine double ; la condition est $\text{Ker } M^2 = \text{Ker } M$. **b.** Mettre $X^2 + aX$ sous forme canonique pour se ramener à la situation précédente.
- 31.** Si $A - A^{-1}$ est diagonalisable, montrer qu'un polynôme annulateur scindé à racines simples de $A - A^{-1}$ fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples de A .
- 32.** M est diagonalisable, examiner les parties réelles des valeurs propres.
- 33.** Montrer que $X^3 + X^2 - 1$ a une racine réelle non rationnelle et deux racines complexes conjuguées ; pour que la somme des valeurs propres soit rationnelle, il faut que les trois racines soient valeurs propres de même ordre, donc que n soit multiple de 3. Pour la réciproque, commencer par noter que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (matrice compagnon du polynôme $X^3 + X^2 - 1$) est solution.
- 34. a.** Poser $A = X^p B$, noter que $X^p \wedge B = 1$, prouver que $\text{Im } u^p = \text{Ker } B(u)$. **b.** Pour $j < p$, il existe x tel que $[u^j \circ B(u)](x) \neq 0_E$; pour $k < p$, en prenant $j = k$ ou $p - k$ suivant les cas, cela donne un vecteur non nul dans $\text{Im } u^k \cap \text{Ker } u^k$.
- 35.** Décomposer P'/P en éléments simples, en déduire que $(P')^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.
- 36. a.** Montrer que, pour tout polynôme P , $P(A)X = XP(B)$. **c.** Si λ est valeur propre de φ , l'équation $\varphi(X) = \lambda X$ s'écrit $(A - \lambda I_n)X = XB$, d'où λ est de la forme $\alpha - \beta$, avec α valeur propre de A et β de B . Pour la réciproque, considérer des matrices X de la forme $U^t V$, où U est vecteur propre de A et V vecteur propre de ${}^t B$.
- 37.** Commencer par noter que $\exp(N)$ est une somme finie. Si N est d'indice p et $X \in \text{Ker}(\exp(N) - I_n)$, commencer par multiplier la relation $\exp(N)X - X = 0$ par N^{p-2} .
- 38.** Commencer par le cas $\lambda = 1$, et utiliser le DL de $\ln(1+x)$.
- 39. b.** Noter que, si λ est valeur propre de A , alors $\sin \lambda$ est valeur propre de $\sin A$; et que $\sin A$ est diagonalisable si A l'est. En déduire que, si A est solution, alors elle est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\sin \alpha = 1$, puis en déduire une contradiction.
- 40. b.** Si $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i = 0_E$, montrer que l'on peut prendre les λ_i positifs, puis obtenir une contradiction en utilisant u_p . **c.** Raisonner par récurrence sur n , en partant de u_{n+1} unitaire et d'une famille obtusangle dans son orthogonal.
- 41. a.** $(\cos \alpha)u$ et $(\sin \alpha)v$ sont déterminés par les relations de l'énoncé ; il faut vérifier que ce sont deux vecteurs orthogonaux, et que la somme des carrés de leurs normes vaut 1. **b.** Poser $x = \lambda u + \mu v$, puis $\cos \theta = \lambda / \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.
- 42. c.** Déterminer un élément f_0 de G ; G est alors l'ensemble des $f_0 - g$, où g décrit V . On cherche donc l'élément de V le plus proche de f_0 .
- 43. b.** Appliquer Weierstrass à la fonction $f \circ \arccos$. **c.** Noter que (e_n) est orthonormée, donc que S_n est un projeté orthogonal de f ; et que $P(\cos t)$ est une combinaison linéaire des e_n .
- 44.** La matrice de l'endomorphisme dans une bonne base devrait être orthogonale ; étudier sa trace.
- 45. a.** Montrer que $\det A = 0$ et que l'orthogonal du noyau est stable. **b.** Décomposer M en somme d'une symétrique S et d'une antisymétrique A , et montrer que $AS = SA$.
- 46. a.** Calculer $(A^t A)^2$, en notant que $A^t A$ est symétrique à valeurs propres positives. **b.** Décomposer A en symétrique + antisymétrique, et utiliser le fait que les symétriques et les antisymétriques sont orthogonales pour le produit scalaire $\text{tr}({}^t P Q)$.
- 47. a.** Décomposer A sous la forme $P D {}^t P$ et prendre $Q = \sqrt{D} {}^t P$. **b.** et **c.** Interpréter les a_{ij} comme des produits scalaires de colonnes de Q .
- 48. a.** Prendre le λ correspondant à $A = I_n$ et montrer qu'il fonctionne pour toute matrice A . **b.** On veut en fait majorer $(\det({}^t A A))^{1/n}$; c'est l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique.
- 49.** Pour l'endomorphisme associé, la condition se traduit par $(f(x)|x) = 0$ pour tout x .
- 50.** Passer par la forme réduite d'une matrice orthogonale pour la décomposer en somme d'une symétrique et d'une antisymétrique.
- 51. b.** Si $\det f > 0$, écrire $f + g = h \circ (\text{Id}_E + h^{-1} \circ g \circ h^{-1}) \circ h$, et montrer que $h^{-1} \circ g \circ h^{-1}$ est symétrique à valeurs propres positives. Si $\det f = 0$, prendre $f_1 = f + \varepsilon \text{Id}_E$.

- 52.** Noter que $B = {}^tAA = A^tA$.
- 53. a.** Pour la somme, montrer que $N(A) = \max \|AX\|/\|X\|$ pour X non nul. **b.** On peut par exemple montrer que, si A et B commutent, alors elles sont diagonalisables dans une même base. **c.** Prendre $B = X^tX$ où X est une colonne propre de A .
- 54. a.** Accroissements finis. **b.** Exprimer t_n comme barycentre à coefficients positifs des taux de variation entre x_n et a et entre y_n et a . **c.** L'exemple classique de fonction dérivable non C^1 est $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ en 0.
- 55.** Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ en écrivant que $f(f^{-1}(x)) = x$; utiliser cette même écriture pour obtenir le terme suivant du développement.
- 56.** Utiliser la concavité de la racine carrée pour majorer la somme des racines à l'aide de la racine de la somme.
- 57.** Écrire $f(c) = f(x) + f'(x)(c-x) + R(c)$ pour $c = a$ et $c = b$; soustraire pour obtenir une expression de $f'(x)$, et utiliser Taylor-Lagrange.
- 58. a.** La condition est $a_k \neq 0$ pour tout k . **b.** Il faut en particulier que les rapports $N_a(X^k)/N_b(X^k)$ et leurs inverses soient bornés.
- 59. a.** Les éléments de S sont les symétries; montrer que, pour f proche de Id_E , -1 n'est pas valeur propre de f . **b.** Si $f \neq \text{Id}_E$ et $f \neq -\text{Id}_E$, sa matrice dans une bonne base est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$; montrer que $\begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ est la matrice d'un élément de S pour tout choix du bloc A .
- 60. b.** Si $M_n \in R$ tend vers M , utiliser des vecteurs propres unitaires des M_n pour montrer que M a une valeur propre de module 1; puis montrer que la deuxième valeur propre est aussi de module 1.
- 61. a.** Pour fermé, construire une suite de fonctions strictement croissantes convergeant vers une fonction constante. Pour ouvert, si $f \in I$, remplacer f par une fonction constante sur un petit intervalle. **b.** S est fermé: si $f_n \in S \rightarrow f$ et $c \in [0, 1]$, prendre une suite d'antécédents de c et en extraire une suite convergente. Le reste est faux: pour B non fermé, procéder comme pour I , mais avec une limite constante sur $[a, d]$ où $d < b$.
- 62. a.** Valeurs intermédiaires pour l'existence, accroissements finis pour l'unicité. **b.** Pour l'existence, montrer que f est continue et introduire le minimum de $x \mapsto \|f(x) - x\|$. **c.** Choisir $a \in C$, et utiliser les fonctions $f_n : x \mapsto [a + (n-1)f(x)]/n$ en justifiant qu'elles prennent leurs valeurs dans C .
- 63. b.** Discuter suivant que $\overline{\text{Ker } \varphi}$ contienne ou non un vecteur $x_0 \notin \text{Ker } \varphi$, en notant que $\overline{\text{Ker } \varphi}$ est un sous-espace de E . **c.** Si $\text{Ker } \varphi$ est fermé, φ est continue en 0_E par caractérisation séquentielle.
- 64. a.** La boule unité fermée est compacte. Pour $\|u(x)\|$, utiliser le vecteur $x/\|x\|$. **c.** Pour le sens difficile, utiliser une base de E .
- 65. a.** Étudier les fonctions coefficients. **b.** Pour le sens direct, si (A_n) est une suite de matrices de $S(A)$, elles ont toutes même polynôme minimal et même polynôme caractéristique que A . Pour le reste, noter que, si T est une matrice triangulaire supérieure, on peut trouver des matrices semblables avec des coefficients au-dessus de la diagonale arbitrairement grands ou arbitrairement petits, en utilisant des matrices de passage diagonales bien choisies.
- 66. b.** Noter que l'intervalle $[1/3, 1]$ est stable par la fonction d'itération. Commencer par étudier le cas $u_0 > 1$. **c.** Noter que, si $u_n \in]1 - \varepsilon, 1[$ avec ε assez petit, alors $u_{n+1} < u_n$; montrer qu'alors il existe $p > n$ tel que $u_p < 1 - \varepsilon$.
- 67.** On peut par exemple commencer par majorer u_n par une suite du type $\lambda\sqrt{n}$.
- 68.** Montrer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ tend vers 1; pousser le développement de cette expression un cran plus loin pour obtenir le deuxième terme.
- 69. a.** Réécrire l'équation sous la forme $(\ln x)/x = 1/n$. **b.** Montrer que u_n tend vers 1, poser $u_n = 1 + \varepsilon_n$ et remplacer dans l'égalité $\ln u_n = u_n/n$, répéter le procédé pour le terme suivant. Pour v_n , montrer qu'elle tend vers $+\infty$; en passant au logarithme dans la relation $(R) : v_n = n \ln v_n$, on en déduit que $\ln v_n \sim \ln n$. En remplaçant $\ln v_n$ par $(\ln n)(1 + \varepsilon_n)$ dans (R) , on en déduit un équivalent de v_n . Répéter pour obtenir le terme suivant.
- 70.** Utiliser le théorème de Rolle pour situer les racines de P'_n . De l'équation $P'_n(r_n) = 0$, on déduit la relation $\frac{1}{r_n} = \frac{1}{1 - r_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - r_n}$; en déduire successivement que $1/r_n$ tend vers $+\infty$, puis est équivalent à $\ln n$.
- 71.** Pour $a < 1$, encadrer $\lfloor \ln n \rfloor$, et noter que $a^{\ln n} = n^{\ln a}$.
- 72.** Minorer le module de la somme des u_n quand n varie de e^p à $e^{p+1} - 1$.
- 73.** Introduire $v_n = u_n/2^n$, montrer que $v_{n+1} \leq (1 + 1/4n^2)v_n$ pour $n \geq 1$, en déduire que v_n converge vers $C > 0$ en passant au logarithme.

74. b. Exprimer S_{2n-1} en fonction de termes de la suite (H_p) des sommes partielles de la série harmonique. Pour les restes, commencer par déterminer un équivalent de R_{2p-1} .

75. b. Étudier la convergence de $\sum (b_{n+1} - b_n)$; utiliser la concavité de $t \mapsto t^\gamma$ pour prouver qu'elle vérifie les hypothèses du TSSA. **c.** En utilisant la relation "naturelle" entre a_n et a_{n+1} , on obtient une expression de a_n en fonction de b_n , qui permet d'obtenir un développement asymptotique.

76. a. Poser $u = nt^2$. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} (\cos u / \sqrt{u}) du$ converge à l'aide d'une intégration par parties; montrer qu'elle est strictement positive en la décomposant en $\sum \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$ et en utilisant le TSSA.

c. Prouver $\int_0^n \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = I - \frac{\sin n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$; étudier les sommes partielles de $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n}$ à l'aide de **b**.

77. Il faut bien choisir la primitive dans l'intégration par parties; puis noter que $(\sqrt{t}-1)/(t-1)$ se simplifie.

78. Justifier l'existence de A et B tels que $|thu - u| \leq A|u|^3$ et $|e^u - 1| \leq B|u|$ pour u assez proche de 0.

79. a. Dans l'intégrale sur $[1, x]$, écrire $e^{it^2} = (2ite^{it^2})/(2it)$, puis intégrer par parties pour justifier la convergence de l'intégrale. **b.** Pour l'équivalence, majorer $1/t^2$ dans l'intégrale par $1/x^2$.

80. b. Pour F , écrire $e^{t^2} = (2te^{t^2})/2t$ et intégrer par parties, en utilisant l'intégration des relations de comparaison pour prouver que l'intégrale obtenue est négligeable devant $F(x)$. En notant $G(x)$ l'équivalent obtenu, écrire $F(x)/G(x) \rightarrow 1$, passer au logarithme et poser $x = F^{-1}(y)$ pour obtenir l'équivalent de F^{-1} .

c. Noter que $0 \leq (u_n - n)e^{n^2} \leq 1$.

81. Poser $G(x) = \int_0^x f(t)e^{-st} dt$, noter que G est bornée, puis effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^x f(t)e^{-st} dt$.

82. b. Il faut noter que $g'(x) = \lambda \sin^3 x / x^2$. **c.** Pour la limite en 0, noter que $(\sin t)/t^2 - (1/t)$ est bornée au voisinage de 0.

83. a. Poser $t = su$ pour se ramener à une intégrale fonction de sa borne supérieure. **c.** Utiliser l'intégration des relations de comparaison pour obtenir un équivalent de $I(1/x)$.

84. Utiliser Cauchy-Schwarz pour les intégrales, pour montrer l'existence de A tel que $|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{|y-x|}$ pour tout (x, y) . Raisonner ensuite par l'absurde en montrant que, si f ne tend pas vers 0, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) de limite $+\infty$, tels que $\int_{x_n}^{x_n+\varepsilon^2} |f| \geq \varepsilon^3$ pour tout n .

85. Intégrer par parties en dérivant l'exponentielle, et décomposer $\ln(1+nt)$ en $\ln n + \ln(t+1/n)$.

86. b. Pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_0^p \frac{s(t)}{t(t+x)} dt = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{s(t)}{t} dt - \frac{1}{n} \int_p^{p+n} \frac{s(t)}{t} dt$, puis que le deuxième terme tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. **c.** Utiliser Stirling pour $f(n)$, en écrivant l'équivalent sous la forme $\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)$. Pour $f(x)$, encadrer x à l'aide de $[x]$.

87. Commencer par calculer $F'(x)$. Pour $F(0)$, établir $\int_c^d \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ac}^{bc} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ad}^{bd} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

88. b. Je ne sais pas si c'est attendu par l'examinateur, mais on peut montrer que $f'(1/2) = 0$ (changements $u = \sqrt{t}$ puis $v = 1/u$, un classique). **c.** Découper en $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Au voisinage de 0, $\int_0^1$ est bornée; comparer $\int_1^{+\infty}$ à l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-(1+x)} dt$. Le raisonnement est analogue en 1, en inversant les rôles des deux intégrales.

89. b. En 0, comparer à une intégrale. En $+\infty$, l'équivalent est $\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6t}$; étudier la différence avec

$S(t)$ pour le justifier.

90. b. L'équivalent est le premier terme de la somme; prouver que la somme des autres termes a une limite finie en 0. **c.** Astuce: calculer $f(t) + f(t+1)$, et noter que f est décroissante; on en déduit un encadrement de $f(t)$.

91. a. Pour $t = 1$, comparer à une intégrale. **c.** En $+\infty$, l'équivalent est le premier terme; prouver que la somme des autres termes est négligeable devant 2^{-t} . En 1, comparer $f(a)$ à $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a \ln t}$; commencer par poser $u = \ln t$ dans l'intégrale, puis $v = (a-1)u$ permet de sortir a de l'intégrale. Utiliser ensuite l'intégration des relations de comparaison.

92. b. Pour la continuité de f , commencer par prouver la continuité de $\ln f$ sur $] -1, 1[$; utiliser $f(x) = (1 - qx)f(qx)$ pour étendre à des intervalles plus grands. **c.** Trouver une série entière dont la somme S vérifie les conditions du **b**.

93. a. Considérer la série définissant $4f(t) - t^2$. **b.** En dérivant deux fois $4f(t) - t^2$, on retombe sur une fonction proportionnelle à f . Résoudre l'équation différentielle; pour déterminer les constantes, noter que

- $f'(0) = 0$ et $\int_0^\pi f = 0$. **c.** Bricoler l'expression de $2t - f'(t)$ pour faire apparaître $g(t)$ et l'expression de t donnée par l'énoncé.
- 94. b.** Si $R_1 > 1$, alors $\sum a_n$ converge. **c.** Prendre $a_n = r^n$ et $a_n = r^n + \pi/2$: l'un au moins des deux $\sin a_n$ ne tend pas vers 0, donc $R_2 = 1$.
- 95. a.** Si $1/|z| < R_a$, que peut-on dire de la suite (z^n/a_n) ? Prendre des suites (a_n) avec des formules différentes pour a_{2p} et a_{2p+1} , pour montrer qu'on ne peut prouver qu'une inégalité entre les rayons. **b.** Si $|z| < R_a R_b$, montrer qu'on peut écrire $z = uv$ avec $|u| < R_a$ et $|v| < R_b$.
- 96. a.** Décomposer $1/X(X+1)(2X+1)$ en éléments simples. **b.** Montrer que la fonction somme est continue sur le segment $[-1, 1]$.
- 97.** Dériver, et regrouper les termes par 4 pour exploiter la périodicité.
- 98. a.** C'est un produit de Cauchy. **b.** En utilisant le fait que $H_n - \ln n$ est bornée, majorer $|f - g|$.
c. Pour $h(-1)$, calculer les sommes partielles S_{2n} à l'aide de factorielles et utiliser l'équivalent de Stirling. Pour l'équivalence, justifier la continuité de h en -1 .
- 99. a.** De $a_n = A_n - A_{n-1}$, on tire $R_a \geq 1$. Si $R_a > 1$, alors $\sum a_n$ converge, contradiction. **b.** Noter que $\sum A_n x^n$ est un produit de Cauchy : on veut donc la limite de $(1-x)^2 \sum A_n x^n$. Écrire $A_n = n(1 + \alpha_n)$ où $\alpha_n \rightarrow 0$; pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que $|\sum n \alpha_n x^n| < \varepsilon \sum n x^n$ pour x assez proche de 1, en coupant la somme en deux et en notant que $\sum n x^n \rightarrow +\infty$ en 1^- . On en déduit $\sum A_n x^n \sim \sum n x^n$ en 1^- .
- 100. b.** Montrer que les fonctions de E sont C^∞ . On peut majorer les modules des dérivées successives sur un intervalle $[-b, b]$, ce qui permet d'utiliser Taylor-Lagrange.
- 101.** La relation $f(x) - \sin x = f(qx)$ permet d'exprimer les coefficients de l'éventuelle série entière en fonction de ceux de la série entière de $\sin$. Réciproquement, montrer que la somme de la série entière obtenue vérifie $S(x) - \sin x = S(qx)$, en déduire que $S = f$.
- 102. b.** On a trouvé en **a** un plan de solutions : on a donc toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour raccorder en 0 deux telles solutions, on est obligé de prendre les mêmes deux premiers coefficients dans la série entière, donc la même série sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
- 103.** Commencer par noter que l'équation homogène a une solution évidente. Le changement de variable $u = 1/x$ simplifie ensuite les calculs.
- 104.** Montrer que l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$ est une droite vectorielle, et que la fonction $y_1 : t \mapsto y_0(t+1)$ appartient à cette droite.
- 105.** Si (y_1, y_2) est un tel système, on obtient deux expressions de $y_i''(t)$ en écrivant que l'équation est vérifiée par y_i en t et en $-t$; cela fournit deux équations portant sur $a(t) + a(-t)$ et $b(t) - b(-t)$. En notant que le wronskien de (y_1, y_2) ne s'annule pas, on en tire a impaire et b paire. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, montrer que la solution y_1 définie par $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$ est paire, en montrant que $t \mapsto y_1(-t)$ est solution du même problème de Cauchy.
- 106.** Soit y_1 la solution de l'équation homogène associée vérifiant $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$. Montrer que $y_1'(1) \neq 0$; on pourra par exemple raisonner par l'absurde, en examinant $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \mid y_1(t) = 0\}$. Montrer que l'on peut compléter en un système fondamental pour (E_0) avec une fonction y_2 telle que $y_2(1) = 0$.
- 107.** Résoudre (E) par variation des constantes ; les hypothèses permettent ensuite de dire que f est bornée de signe constant sur un intervalle $[A, +\infty[$.
- 108. b.** Il n'y a de problème qu'au voisinage des points de Δ ; mais f est la somme d'une série entière en xy au voisinage de ces points.
- 109. a.** Utiliser $|2xy| \leq x^2 + y^2$. **b.** Noter qu'il n'y a pas d'extremum local en $(0, 0)$. Passer en polaires : $f(x, y)$ est de la forme $g(r)h(\theta)$, donc est localement minimale quand g est localement minimale et h localement maximale, car alors g est négative et h positive.
- 110.** Introduire la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto h(at, bt)$.
- 111. b.** On arrive à $2v(\partial g/\partial v) = \lambda g$, qui se résout comme $2ty' = \lambda y$, sauf que la "constante" dépend de u .
- 112.** Introduire u tel que $\varphi(x) = (u|x)$ pour tout x . En décomposant chaque vecteur x sous la forme $x = x_0 + \lambda u$, où $x_0 \in u^\perp$, $f(x)$ se met sous la forme $g(\lambda)h(x_0)$ avec $h \geq 0$.
- 113.** Pour calculer la probabilité α qu'il y ait un nombre pair d'erreurs, introduire la probabilité β qu'il y en ait un nombre impair et trouver deux relations entre ces deux nombres.
- 114. a.** Noter que, à k fixé, tous les tirages donnant k boules rouges ont la même probabilité. **b.** Avec $a_n = P(X_n = 0)$, étudier la convergence de la série $\sum (\ln a_{n+1} - \ln a_n)$. **c.** Avec $b_n = P(Y = n)$, il faut ici un développement asymptotique de $\ln b_{n+1} - \ln b_n$ assez poussé pour en déduire un équivalent de b_n , ou au moins un ordre de grandeur précis.
- 115. a.** Ne pas oublier que les p_k doivent être positifs. **b.** L'espérance donne la seule valeur possible de λ ; examiner ensuite p_2/p_1 par exemple.

- 116.** Commencer par étudier la variable X_k donnant le nombre d'appels nécessaire pour contacter le client numéro k .
- 117. b.** Utiliser la relation de récurrence trouvée en **a.** pour déterminer la fonction génératrice de A_n , qui est un produit de fonctions affines, donc de fonctions génératrices de variables de Bernoulli.
- 118. a.** Exprimer $P(X = k)$ sous forme d'une somme en fonction de Y , et montrer que $P(Z = k)$ a la même expression. **b.i.** Déterminer la loi de Y en notant que $P(Y = n)$ s'exprime simplement en fonction de $P(X = n)$ et $P(X = n+1)$; noter ensuite que $P((X = j) \cap (Z = k)) = P((X = j) \cap (Y = j+k-1))$. **b.ii.** Utiliser les remarques précédentes pour exprimer de deux manières $P((X = j) \cap (Z = 1))$. **c.** Utiliser $E(X + Z)$.
- 119.** Étudier $V(X + Y)$.