1. CCP - Monsieur Balas

1.1. Banque

Exercice 83.

1.2. Exercice 1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^\alpha}$.

a. On suppose $1 < \alpha < 3$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On suppose $\alpha \leqslant 1$. En utilisant les nombres $u_n = \int_{n\pi} (n+1)\pi f(t)\,dt$, montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Déterminer les valeurs de f pour lesquelles f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé

a. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
En 0, $f(x) \sim x^{2-\alpha} > 0$, et $2 - \alpha < -1$, donc, par comparaison aux séries de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1]$.
En $+\infty$, $f(x)$ est dominé par $1/x^\alpha$ et $\alpha > 1$; pour les mêmes raisons, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Par suite, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Sur chaque intervalle $\left[n\pi + \dfrac{\pi}{6}, (n+1)\pi - \dfrac{\pi}{6}\right]$, on a $|\sin t| \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $f(t) \geqslant \dfrac{1}{4x^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{4(n+1)^\alpha}$.
Finalement, pour tout n, puisque $f \geqslant 0$: $u_n \geqslant \displaystyle\int_{n\pi+\pi/6}^{(n+1)\pi-\pi/6} f(t)\,dt \geqslant \frac{1}{4(n+1)^\alpha}\,\frac{\pi}{3}$.
Puisque $\alpha \leqslant 1$, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge. Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, $\int_0^{n\pi} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et donc l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est aussi divergente.

c. Il reste à étudier le cas $\alpha \geqslant 3$. Dans ce cas, en 0, $f(x) \sim x^{2-\alpha}$ et $2 - \alpha \leqslant -1$, l'intégrale sur $]0, 1]$ est donc divergente, donc l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ diverge.

1.3. Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $r_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$ et $b_n = 1/r_n$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.

b. Étudier la convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.

Corrigé

a. On encadre facilement r_n par n et $n \cdot n^{-\alpha} = n^{1-\alpha}$ (le sens des inégalités dépend du signe de α), donc b_n par $1/n$ et $n^{\alpha-1}$. Puisque tout est positif et que les coefficients $1/n$ et $n^{\alpha-1}$ donnent tous deux un rayon de convergence égal à 1, le rayon de $\sum b_n x^n$ vaut 1.

b. Pour $x = -1$:
- ▷ si $\alpha > 1$, r_n tend vers une limite finie non nulle, donc aussi b_n ; par suite, $\sum b_n(-1)^n$ diverge grossièrement ;
- ▷ si $\alpha \leqslant 1$, la suite (r_n) croît vers $+\infty$, donc (b_n) décroît et tend vers 0 : la série $\sum b_n(-1)^n$ converge par le TSSA.

Pour $x = 1$:
- ▷ si $\alpha > 1$, $\sum b_n$ diverge grossièrement comme dans le cas $x = -1$;
- ▷ si $\alpha \leqslant 1$, on peut par exemple obtenir un équivalent de r_n par comparaison à une intégrale (encore une fois, le sens des inégalités dépend du signe de α). On obtient $r_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ (ou $\ln n$ pour $\alpha = 1$).
  Par suite, $\sum b_n = \sum 1/r_n$ converge si et seulement si $\alpha < -2$.

2. CCP - Mademoiselle Makiela

Je ne le retape pas, c'est, à quelques détails près, l'exercice 73 du poly d'exos CCP, corrigé en classe. Pour voir les quelques détails, c'est l'exercice 3996 de la BEOS (inscrivez-vous à la tribu, vous le trouverez facilement).

3. Mines - Monsieur Chaubier

Soient a et n deux entiers naturels non nuls, on pose $N = an$. On dispose aléatoirement N boules dans n urnes. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$. En donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$, a étant fixé.

Corrigé

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit X_k la variable de Bernoulli valant 1 si l'urne numéro k reste vide, 0 sinon ; on a alors $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Le nombre de résultats possibles est n^N (pour chaque boule, on a n choix possibles pour l'urne) ; le nombre de résultats laissant vide l'urne k est $(n-1)^N$. Donc $p = P(X_k = 1) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^N = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{an}$.

Puisque X_k suit une loi de Bernoulli, on a $E(X_k) = p$; puis, par linéarité, $E(Y) = np = n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{an}$.

On obtient classiquement $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{an} = e^{-a}$ et donc $E(Y) \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-a}$.

Pour la variance, il faut noter que les X_k ne sont pas indépendants (les urnes ne peuvent pas être toutes vides par exemple), et donc on ne peut pas affirmer que Y suit une loi binômiale. On commence donc par calculer les covariances.

Soient j et k distincts ; X_jX_k suit encore une loi de Bernoulli. Un calcul analogue à celui de $P(X_k = 1)$ donne $q = P(X_jX_k = 1) = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{an}$ qui est aussi l'espérance de X_jX_k.

On en tire $\operatorname{Cov}(X_j, X_k) = E(X_jX_k) - E(X_j)E(X_k) = q - p^2 = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{an} - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2an}$.

Finalement, $V(Y) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + \sum_{j\neq k} \operatorname{Cov}(X_j, X_k) = np(1-p) + (n^2 - n)(q - p^2)$. Sauf erreur de calcul de ma part (faites-les...), on trouve $np(1-p) \sim ne^{-a}(1 - e^{-a})$ et $(n^2 - n)(q - p^2) \sim -nae^{-2a}$. La somme des équivalents est $ne^{-2a}(e^a - (1+a))$ non nulle puisque $a \neq 0$, c'est donc l'équivalent cherché.

4. CCP - Monsieur Levy

Soit $n \geqslant 1$; soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que A admet au moins un vecteur propre ; soit α la valeur propre associée.

b. On suppose ici que $AB = BA$.

- **i.** Montrer que $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)$ est stable par B.
- **ii.** Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

c. On suppose ici qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que $AB - BA = \beta A$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi(M) = MB - BM$ pour toute matrice M.

- **i.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Phi(A^k) = k\beta A^k$.
- **ii.** En déduire que A est nilpotente, et que $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.
- **iii.** Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.

Corrigé

a. Le polynôme caractéristique de A a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

b. i. Voir cours : B commute avec $A - \alpha I_n$, donc en particulier le noyau de $A - \alpha I_n$ est stable par B

- **ii.** Considérer l'endomorphisme induit par B sur $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)$: il a au moins un vecteur propre par **a**, qui est aussi un vecteur propre de A par définition de $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)$.

c. i. Récurrence : multiplier la relation k à gauche par A, et utiliser $AB = BA + \beta A$ pour obtenir la relation $k+1$.

ii. Si A n'est pas nilpotente, on a une infinité de vecteurs propres pour Φ (les A^k) associés à une infinité de valeurs propres distinctes (les $k\beta$) ; c'est impossible puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

Si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, alors A est inversible, et donc A^k l'est aussi pour tout k, contradiction.

iii. La relation $AB - BA = \beta A$ permet de démontrer que $\operatorname{Ker} A$ est stable par B. On conclut comme en **b.ii**, avec $\alpha = 0$.

5. IMT - Monsieur Levy

5.1. Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit, c'est-à-dire vérifiant $\forall (M,N) \in H^2 \quad MN \in H$. On suppose que $I_n \notin H$.

a. Donner un supplémentaire de H.

b. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \big(M^2 \in H \Longrightarrow M \in H\big)$.

c. En déduire une contradiction, puis conclure.

Corrigé

a. Puisque H est un hyperplan et que $I_n \notin H$, on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut l'écrire sous la forme $\alpha I_n + N$ où $N \in H$ d'après **a** ; on a donc $M^2 = \alpha^2 I_n + 2\alpha N + N^2$.

Supposons $M^2 \in H$. Puisque H est un sous-espace stable par produit, $2\alpha N + N^2$ est dans H, et donc $M^2 - 2\alpha N - N^2 = \alpha^2 I_n \in H$. Puisque $I_n \notin H$, on a donc $\alpha = 0$, d'où $M = N \in H$.

c. Considérons les matrices (E_{ij}) de la base canonique. Pour $i \neq j$, on a $E_{ij}^2 = 0 \in H$, donc $E_{ij} \in H$ par la question précédente.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \neq i$. Alors E_{ij} et E_{ji} sont dans H d'après ce qui précède, donc $E_{ii} = E_{ij}E_{ji} \in H$ (stabilité par produit).

Mais alors, H est un sous-espace qui contient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $H = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, contradiction.

Par suite, $I_n \in H$.

5.2. Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$, et que ces deux limites sont égales. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Corrigé

Notons ℓ la limite. Si f est constante égale à ℓ, c'est réglé. Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq \ell$, par exemple $f(a) > \ell$ (sinon, on remplace f par $-f$).

Prenons $\varepsilon \in \,]0, f(a) - \ell[$. On peut choisir A et B dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \,]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$, on ait $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $x \in \,]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$, $\quad f(x) < \ell + \varepsilon < f(a)$ ce qui montre au passage que $a \in [A, B]$.

Puisque f est dérivable, donc continue, sur le segment $[A, B]$, elle passe par un maximum en un point c de $[A, B]$; en particulier, $f(a) \leqslant f(c)$.

Puisque $f(x) < f(a) \leqslant f(c)$ pour tout $x \notin [A, B]$, on a en fait en c un maximum global sur $\mathbb{R}$. Enfin, f est dérivable en c, et c est évidemment intérieur à $\mathbb{R}$, on a donc $f'(c) = 0$.

Variante astucieuse : on se ramène aux hypothèses de Rolle en posant $g(t) = f(\tan t)$ pour $t \in \,]-\pi/2, \pi/2[$, et en prolongeant g par continuité en $-\pi/2$ et $\pi/2$ par la valeur ℓ.

6. IMT - Monsieur Le Floch

6.1. Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$.

b. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $h \longmapsto h \circ g - g \circ h$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

c. Montrer que f est nilpotent.

Corrigé

Voir la planche 4 (CCP - M. Levy), question c.

6.2. Exercice 2

a. Déterminer les morphismes d'anneau continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Même question, mais en retirant l'hypothèse de continuité.

Corrigé

a. Soit f un tel morphisme. On a $f(0) = 0$ (morphisme de groupe pour l'addition). Si $x \in \mathbb{R}$, on montre par récurrence que $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$; puis, grâce à $f(px) + f(-px) = 0$, $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
Par définition des morphismes d'anneaux, $f(1) = 1$; donc, per ce qui précède, $f(p) = p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$, s'écrivant $r = p/q$ avec p et q entiers. Alors $qf(r) = f(qr) = f(p) = p$ donc $f(r) = r$.
Il ne reste qu'à utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ et la continuité de f pour prouver que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. On a comme en **a** : $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$; alors $f(x) = f(\sqrt{x})^2$ puisque f respecte le produit, donc $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
On en déduit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(y - x) \geqslant 0 \Longrightarrow f(y) - f(x) \geqslant 0$ et donc f est croissante.
Soit $x \in \mathbb{R}$; on peut trouver deux suites de rationnels r_n et s_n, convergeant vers x, et telles que $r_n \leqslant x \leqslant s_n$ pour tout n (prendre les approximations décimales par défaut et par excès). On a alors, pour tout n, $r_n = f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(s_n) = s_n$ et donc $f(x) = x$ en passant à la limite.

7. IMT - Monsieur Pagnier

7.1. Exercice 1

a. Donner la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

b. Énoncer puis démontrer le théorème de continuité d'une limite uniforme.
Indication : on pourra remarquer que $f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 + x^n}$. Étudier la convergence simple de la suite (f_n). Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Corrigé

a. Voir le cours.

b. Idem.

c. La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \longmapsto 1$ si $x \in [0, 1[$, 0 si $x = 1$, et -1 si $x > 1$. La fonction f n'est clairement pas continue sur $\mathbb{R}_+$ alors que les f_n le sont (fonctions rationnelles), la convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

7.2. Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$; soit $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice n.

a. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.

b. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

c. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

d. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? On donnera deux méthodes.

Corrigé

a. Si f est injective ou surjective, alors elle est bijective, et donc f^n l'est aussi, contradiction avec $f^n = 0$.

b. Par définition de l'indice de nilpotence, il existe x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Classiquement, on montre alors que la famille donnée est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle, que l'on transforme successivement par f^{n-1}, f^{n-2},..., en notant que $f^k(x_0) = 0_E$ pour $k \geqslant n$.

c. C'est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Le polynôme caractéristique est X^n, donc 0 est la seule valeur propre, et est de multiplicité n, mais le sous-espace propre est de dimension 1 (la matrice est clairement de rang $n-1$), donc f n'est pas diagonalisable.

Deuxième méthode : je ne vois pas clairement ce qui est attendu ; peut-être montrer que X^n est le polynôme minimal, et qu'il n'est pas scindé à racines simples ?

8. CCP - Monsieur Pagnier

8.1. Exercice 1

Exercice 45 de la Banque CCP.

8.2. Exercice 2

On note M^T la transposée d'une matrice M. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $A = XY^T$.

a. **i.** Donner la taille de A et préciser la valeur de ses coefficients.

ii. Montrer que A est de rang 1 et en déduire la dimension de $\operatorname{Ker} A$.

iii. Donner une expression matricielle de $\operatorname{tr} A$.

b. Réciproquement, montrer que toute matrice de rang 1 peut s'écrire sous la forme XY^T.

c. Déterminer $\operatorname{Sp} A$.

d. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq 0$.

Corrigé

a. **i.** La matrice A est carrée, à n lignes et colonnes, et $(A)_{i,j} = x_i y_j$ pour tout couple (i,j).

ii. Les colonnes de A sont en fait les colonnes $y_1X, \ldots, y_nX$. Puisque $X \neq 0$ et que l'un au moins des y_j est non nul, l'une au moins de ces colonnes est non nulle ; donc $\operatorname{rg} A \geqslant 1$. Mais les colonnes de A sont toutes sur la droite $\operatorname{Vect} X$, donc $\operatorname{rg} A \leqslant 1$ et finalement $\operatorname{rg} A = 1$.

On en tire $\dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rg} A = n - 1$.

iii. On a $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$.

b. Réciproquement, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Alors, l'une au moins de ses colonnes est non nulle, notons-la C ; et les autres colonnes sont colinéaires à C, donc B est de la forme $B = \begin{pmatrix}\lambda_1 C & \lambda_2 C & \cdots & \lambda_n C\end{pmatrix} = CL$ avec $L = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$; donc $B = XY^T$ avec $X = C$ et $Y = L^T$.

c. Puisque $\dim \operatorname{Ker} A = n-1$, 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$; puisque la trace de A est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, la dernière valeur propre est $\operatorname{tr} A$.

d. Si $\operatorname{tr} A = 0$, alors 0 est valeur propre de multiplicité n, mais le sous-espace propre associé, $\operatorname{Ker} A$, est de dimension $n-1$: A n'est pas diagonalisable.

Si $\operatorname{tr} A \neq 0$, alors $\operatorname{tr} A$ est valeur propre simple, donc automatiquement associé à une droite de vecteurs propres ; et le sous-espace propre pour 0 est toujours de dimension $n-1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est n, A est bien diagonalisable.

9. CCP - Monsieur Chalumeau

On cherche à obtenir toutes les pièces d'un puzzle de N pièces différentes. On achète chaque semaine une pièce emballée, chaque pièce étant équiprobable. On note Y_k la variable aléatoire qui associe le nombre de semaines nécessaires pour avoir une k-ième nouvelle pièce *à partir du moment où on en a déjà* $k-1$.

a. i. Les Y_k sont-ils mutuellement indépendants ? Quelle est la loi de Y_1 ?

ii. Donner la loi de Y_k. Donner son espérance et sa variance.

b. On introduit la variable aléatoire X, comptant le nombre de coups nécessaires pour avoir les N pièces différentes du puzzle.

i. Exprimer X en fonction des Y_k, puis exprimer l'espérance de X en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

ii. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de H_n.

iii. En déduire un équivalent de l'espérance.

Corrigé

a. i. Quand on cherche à obtenir la k-ième pièce, la situation de départ ne dépend pas du nombre de semaines déjà écoulées, donc ne dépend pas des Y_i pour $i \leqslant k-1$. Il semble donc raisonnable de supposer les Y_k indépendants (ce qui ne change de toutes façons rien dans la suite).

La variable Y_1 ne prend évidemment que la valeur 1, avec la probabilité 1.

ii. Quand on cherche à obtenir la k-ième pièce, on a à chaque achat une probabilité de réussite égale à $p_k = (N-k+1)/N$, indépendante du nombre d'achats déjà effectués. La variable Y_k donne donc le temps d'attente du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p_k, elle suit donc une loi géométrique de paramètre p_k.

Autrement dit, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X_k = i) = (1-p_k)^{i-1} p_k = \dfrac{(k-1)^{i-1}(N-k+1)}{N^i}$.

On a donc (voir le cours) $E(Y_k) = \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{N}{N-k+1}$ et $V(X) = \dfrac{1-p_k}{p_k^2} = \cdots$. Noter que les formules s'appliquent bien pour $k = 1$.

b. i. On a évidemment $X = \sum_{k=1}^{N} Y_k$.

On en déduit $E(X) = N \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N-k+1} = NH_N$ par le changement d'indice $j = N-k+1$.

ii. On a, si $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k$, et, si $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \ln(k) - \ln(k-1)$.

En sommant, on en déduit $0 \leqslant 1 + \ln N \leqslant H_N \leqslant \ln(N+1)$ d'où le classique $H_N \sim \ln N$.

iii. $E(X) \sim N \ln N$.

10. CCP - Mlle Shihata

10.1. Exercice 1

Exercice 72 de la Banque CCP.

10.2. Exercice 2

Pour $x > 0$, on définit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

a. Donner le domaine de définition D de S.

b. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

c. Donner le sens de variation de S.

d. Montrer que $\quad \forall x > 0 \quad S(x) + S(x+1) = \dfrac{1}{x}$.

e. Déterminer un équivalent de S en 0.

f. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Corrigé

a. Pour tout $x > 0$, la suite de terme général $1/(x+n)$ décroît et tend vers 0, la série définissant $S(x)$ converge donc par le TSSA ; donc $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \longmapsto 1/(x+n)$. Alors, la série des f_n converge simplement sur D, et chaque f_n est de classe C^1 sur D. De plus, pour $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $\quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{(a+n)^2}$ ce qui prouve la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n'$ sur $[a,b]$.

On sait qu'alors S est de classe C^1 sur D, et que $\quad \forall x > 0 \quad S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$.

c. Soit $x > 0$. La série définissant $S'(x)$ vérifie aussi les hypothèses du TSSA ; on sait qu'alors la somme $S'(x)$ est du signe de son premier terme, donc négative. Par suite, S est décroissante sur D.

d. Il suffit d'effectuer le changement d'indice $k = n+1$ dans la somme définissant $S(x+1)$; les termes d'indice $k \geqslant 1$ s'éliminent alors entre les deux sommes, ne reste que le terme d'indice 0 dans $S(x)$, c'est-à-dire $1/x$.

e. D'après la question précédente, $S(x) = \dfrac{1}{x} - S(x+1)$ au voisinage de 0. Puisque S est de classe C^1 donc continue sur D, $S(x+1)$ tend vers $S(1)$ en 0, donc est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ en 0. Par suite, $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en 0.

f. On utilise la décroissance de S et la relation établie en **d**. Pour $x > 1$, on a $\quad 2S(x) \geqslant S(x) + S(x+1) = \dfrac{1}{x}$ et $\quad 2S(x) \leqslant S(x-1) + S(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad$ donc $\quad \dfrac{1}{2x} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{1}{2(x-1)}$.

On en tire immédiatement $\quad S(x) \sim \dfrac{1}{2x} \quad$ en $+\infty$.

11. Micro-Mines - Mademoiselle Démoulin

11.1. Exercice 1

a. Dans un espace vectoriel normé, donner la définition d'un point adhérent à une partie, et une caractérisation de l'adhérence d'une partie.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est adhérent à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

c. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé

a. Voir le cours ; j'imagine que la caractérisation attendue est "c'est l'ensemble des limites de suites d'éléments de la partie", ou peut-être "le plus petit fermé contenant la partie".

b. Classique : on choisit $a > 0$ tel que $]0, a[$ ne contienne aucune valeur propre de M, ce qui est possible puisque M n'a qu'un nombre fini de valeurs propres ; la suite $\left(M - \dfrac{a}{p} I_n\right)_{p \geqslant 2}$ est alors une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (puisque les a/p ne sont pas valeurs propres), qui converge vers M.

c. Puisque la matrice nulle, par exemple, est adhérente à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mais n'est pas élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas égal à son adhérence, donc n'est pas fermé.

11.2. Exercice 2

On dispose de deux boîtes A et B. Initialement, A contient deux jetons marqués "0", et B deux jetons marqués "1". On tire un jeton au hasard de A, que l'on échange avec un jeton tiré au hasard de B. On répète l'expérience indéfiniment. On note X_n la somme des valeurs des jetons situés dans A au bout de n tirages.

Pour tout n, on pose $p_n = P(X_n = 0)$, $q_n = P(X_n = 1)$, $r_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

a. Pour tout n, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. Pour tout n, exprimer U_n en fonction de n.

c. La suite (U_n) converge-t-elle ?

Corrigé

a. La formule des probabilités totales donne

$$p_{n+1} = P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)p_n + P(X_{n+1} = 0|X_n = 1)q_n + P(X_{n+1} = 0|X_n = 2)r_n$$

Or, si $X_n = 0$ ou $X_n = 2$, il est impossible d'avoir $X_{n+1} = 0$, donc les deux probabilités conditionnelles $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$ et $P(X_{n+1} = 0|X_n = 2)$ sont nulles ; et $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = 1/4$ (probabilité de choisir l'unique jeton "1" dans A, et l'unique jeton "0" dans B). Finalement, $p_{n+1} = q_n/4$.
De même,

$$q_{n+1} = P(X_{n+1} = 1|X_n = 0)p_n + P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)q_n + P(X_{n+1} = 1|X_n = 2)r_n$$

Ici, $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = 1$, et $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1/2$ (probabilité de tirer deux jetons "1", ou deux jetons "0"), donc $q_{n+1} = p_n + q_n/2 + r_n$.
Enfin, on montre comme dans le premier cas que $r_{n+1} = q_n/4$. On a donc finalement

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = AU_n$$

avec des notations évidentes.

b. On en déduit immédiatement que, pour tout n, $U_n = A^n U_0$, avec $U_0 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour terminer le calcul, on diagonalise A.

On trouve sans difficulté $\chi_A = X(X-1)(X+1/2)$; puis $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 0, 1 et $-1/2$.
Enfin, $U_0 = \dfrac{1}{2} V_1 + \dfrac{1}{6} V_2 + \dfrac{1}{3} V_3$, et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \dfrac{1}{6} V_2 + \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n V_3$.

c. Clairement, (U_n) a pour limite $\dfrac{1}{6} V_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$.

12. CCP - Monsieur Michard

Soit $E = \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose $p_\infty(f) = \sup\big\{|f(t)|\ ;\ t \in [0,1]\big\}$, $p_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $p_2(t) = \sqrt{(f|f)}$ où $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ pour tout $(f,g) \in E^2$.

a. Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall f \in E \quad p_2(f) \leqslant \alpha p_\infty(f)$ et $p_1(f) \leqslant \beta p_2(f)$.

b. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?

c. Soit $F = \big\{f \in E \,|\, \forall x \in [0,1] \quad f(x) \geqslant 0\big\}$.

  i. F est-il fermé pour p_∞ ?

  ii. Est-il fermé pour p_1 ? pour p_2 ?

Corrigé

a. Soit $f \in E$; posons $M = p_\infty(f)$. Alors, $|f(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $\int_0^1 f(t)^2\,dt \leqslant M^2$. Finalement, $p_2(f) \leqslant M = p_\infty(f)$. On peut donc prendre $\alpha = 1$.
Soient maintenant $g = |f|$ et h la fonction constante égale à 1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, on a $\left|\int_0^1 g(t)h(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 g(t)^2\,dt}\sqrt{\int_0^1 h(t)^2\,dt}$ soit $p_1(t) \leqslant p_2(t)$. On peut donc aussi prendre $\beta = 1$.

b. Pour tout n, soit $f_n : t \longmapsto t^n$. Alors, pour tout n, $p_\infty(f_n) = 1$, $p_1(f_n) = 1/(n+1)$ et $p_2(f_n) = 1/\sqrt{2n+1}$.
Les rapports $\dfrac{p_\infty(f_n)}{p_1(f_n)}$, $\dfrac{p_\infty(f_n)}{p_2(f_n)}$ et $\dfrac{p_2(f_n)}{p_1(f_n)}$ ne sont donc pas majorés, les normes sont deux à deux non équivalentes.

c. **i.** Soit (f_n) une suite d'éléments de F, convergeant vers une fonction $f \in E$ pour la norme p_∞. On sait qu'alors la suite (f_n) converge uniformément, donc simplement, vers f sur $[0,1]$.
On en déduit $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \geqslant 0$ puisque les $f_n(x)$ sont positifs, donc $f \in F$; par suite, F est fermé.

ii. Montrons que $G = E \setminus F$ est ouvert pour la norme p_1. Soit $g \in G$; par définition de G, on peut choisir $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) < 0$. Puisque g est continue en x_0, on peut choisir $\alpha > 0$ tel que $g(x) \leqslant g(x_0)/2$ pour tout x de $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (adapter dans les cas $x_0 = 0$ ou 1).
Soit maintenant $f \in F$; on a alors $f(x) - g(x) \geqslant -g(x_0)/2 > 0$ sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, et donc $p_1(f - g) \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \big(f(t) - g(t)\big)dt \geqslant -\alpha g(x_0)$.
On a donc trouvé $r = -\alpha g(x_0) > 0$ tel que, pour tout $f \in F$, la distance de g à f pour p_1 est supérieure ou égale à r ; autrement dit, la boule ouverte de centre g et de rayon r ne contient aucun élément de f, donc est incluse dans G.
On peut trouver une telle boule pour tout $g \in G$, donc G est ouvert, et F est bien fermé.
On montre de manière analogue que F est fermé pour p_1.

13. TPE-EIVP - Monsieur Bluche

13.1. Exercice 1

On dispose de n pièces numérotées. La k-ième pièce a une probabilité $\dfrac{1}{2k+1}$ de donner pile.

a. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note u_i la probabilité d'avoir un nombre pair de "pile" après avoir lancé les i premières pièces. Pour tout i, exprimer u_{i+1} en fonction de i et u_i.

b. Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de "pile" en lançant toutes les pièces ?

Corrigé

a. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons S_k l'événement "on a un nombre paire de pile après les k premiers lancers" ; on a donc $u_k = P(S_k)$. Soit $i < n$; la formule des probabilités totales donne

$$u_{i+1} = P(S_{i+1}|S_i)P(S_i) + P(S_{i+1}|\overline{S_i})P(\overline{S_i}) = P(S_{i+1}|S_i)u_i + P(S_{i+1}|\overline{S_i})(1 - u_i)$$

Or, $P(S_{i+1}|S_i) = 1 - \dfrac{1}{2i+3}$ (il faut un face au rang $i+1$ si on veut que le nombre de pile reste pair) et, pour des raisons analogues, $P(S_{i+1}|\overline{S_i}) = \dfrac{1}{2i+3}$.

On en déduit après calculs $\quad u_{i+1} = \dfrac{2i+1}{2i+3}\,u_i + \dfrac{1}{2i+3}$.

b. Pour tout i, posons $v_i = (2i+1)u_i$. Après multiplication par $2i+3$, la relation précédente s'écrit alors $v_{i+1} = v_i + 1$, et donc $v_n = v_1 + (n-1)$, soit $(2n+1)u_n = 3u_1 + n - 1$.

Puisque $u_1 = \dfrac{2}{3}$ (probabilité d'avoir face au premier lancer), on a donc $\quad u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

13.2. Exercice 2

Il s'agit de l'exo 2 de la planche 10 (CCP - Mlle Shihata). Les interrogateurs vont se fournir sur la BEOS ?

14. IMT - Mademoiselle Lemercier

14.1. Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres toutes positives ou nulles.

a. Montrer qu'il existe M symétrique telle que $M^2 = A$.

b. Montrer que, pour toute colonne X, ${}^tXAX \geqslant 0$.
En déduire que les coefficients diagonaux de A sont tous positifs ou nuls.

c. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres toutes positives ou nulles. Montrer que $0 \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Corrigé

a. Puisque A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans le groupe orthogonal : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P^{-1} = {}^tP$.
Par hypothèse, les λ_i sont positifs, on a donc $D = (D')^2$ avec $D' = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n)$. On a alors $A = M^2$ avec $\quad M = PD'P^{-1}$, et M est bien symétrique puisque $P^{-1} = {}^tP$.

b. On a alors, pour toute colonne X, $\quad {}^tXAX = ({}^tX{}^tM)(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0$.
En particulier, en prenant pour X la i-ème matrice de la base canonique E_i, ${}^tE_iAE_i$ est égal au coefficient $(A)_{ii}$ de la diagonale, les coefficients diagonaux sont bien tous positifs.

c. On a $\quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(PD\,{}^tPB) = \operatorname{tr}(D\,{}^tPBP) = \operatorname{tr}(DB')$ où $B' = {}^tPBP$ est symétrique et semblable à B, donc en particulier a des valeurs propres positives, et donc, d'après la question précédentes, des coefficients diagonaux positifs.
Notons $c_1, \ldots, c_n$ les coefficients diagonaux de B'. Un calcul immédiat donne $\quad \operatorname{tr}(DB') = \sum \lambda_i c_i \geqslant 0$.
D'autre part, puisque tous les nombres sont positifs, $\sum \lambda_i c_i \leqslant (\sum \lambda_i)(\sum c_i)$. Or, $\quad \sum \lambda_i = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(A)$, et $\quad \sum c_i = \operatorname{tr}(B') = \operatorname{tr}(B)$.
On a bien $\quad 0 \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

14.2. Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions convexes et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé

Remarque : faire une figure ; l'argument ci-dessous revient essentiellement à dire que, en dehors du segment $[a, b]$, la courbe de f est au-dessus de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe.

Soit f une fonction convexe et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons f non constante. On peut alors trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$; supposons par exemple $f(a) > f(b)$.

Soit $c \in\,]-\infty, a[$. Puisque f est convexe, l'inégalité des pentes dit que

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{d'où} \quad f(c) \geqslant f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(a - c)$$

Puisque $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$, cette minoration montre que $f(c)$ tend vers $+\infty$ quand c tend vers $-\infty$, en contradiction avec l'hypothèse f bornée.

On montre de manière analogue que, si $f(a) < f(b)$, alors f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ce qui est toujours impossible. Par suite, f est forcément constante.

La réciproque étant immédiate, les fonctions convexes bornées sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes.

15. IMT - Monsieur Chalumeau

15.1. Exercice 1

On lance deux dés équilibrés ; on note U_1 et U_2 les deux variables aléatoires correspondants aux résultats de chacun des 2 dés.

On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U1, U2)$.

a. Donner la loi et l'espérance de X.

b. Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.

c. Exprimer de même XY. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Corrigé

a. Le plus simple est de commencer par calculer $P(X \geqslant k)$ pour tout $k \in [\![1,6]\!]$. En effet, $X \geqslant k \Longleftrightarrow U_1 \geqslant k$ et $U_2 \geqslant k$, donc $\quad P(X \geqslant k) = \dfrac{(7-k)^2}{6^2}$.

L'événement $(X = k)$ est alors égal à $(X \geqslant k) \setminus (X \geqslant k+1)$; puisque $(X \geqslant k+1) \subset (X \geqslant k)$, on a donc finalement $\quad P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1) = \dfrac{13-2k}{6^2}$.

On peut aussi calculer directement cette probabilité, à condition de faire attention à ne pas compter deux fois le cas $U_1 = U_2 = k$.

On a alors $\quad E(X) = \dfrac{1}{6^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{6}[13k - 2k^2] = \dfrac{13}{6^2}\dfrac{6(6+1)}{2} - \dfrac{2}{6^2}\dfrac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6} = \dfrac{7\times 13}{6^2} \simeq 2.53.$

b. On a clairement $X+Y = U_1+U_2$ (l'un des deux nombres X et Y est U_1 et l'autre est U_2), donc $E(Y) = E(U_1) + E(U_2) - E(X)$ par linéarité. Les variables U_1 et U_2 suivent par hypothèse la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, donc $E(U_1) = E(U_2) = 7/2$. Finalement, $\quad E(Y) = \dfrac{7\times 23}{6^2} \simeq 4.47.$

Vérifier que $E(Y) \geqslant E(X)$...

c. De même, $XY = U_1U_2$. Les variables U_1 et U_2 étant indépendantes, $E(XY) = E(U_1)E(U_2) = \dfrac{7^2}{2^2}$.

Finalement, $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dfrac{5^2\times 7^2}{6^4} \simeq 0.95.$

15.2. Exercice 2

Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers n congrus a -1 modulo 4.

Corrigé

On s'inspire de la démonstration classique du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à -1 modulo 4, notons-les $p_1, \ldots, p_n$ (il en existe effectivement : 3,7,...).

Posons alors $N = 2 + \prod_{k=1}^{n} p_k^2$. Alors, N n'est divisible par aucun des p_k, et est congru à -1 modulo 4. De plus, N est impair, donc ses diviseurs premiers sont impairs, donc congrus à 1 ou -1 modulo 4.

Si tous ses diviseurs premiers étaient congrus à 1, alors N lui-même serait congru à 1, ce qui n'est pas le cas. Il a donc un diviseur premier congru à -1, qui n'est aucun des p_k, on a donc une contradiction.

Il y a donc bien une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.