Correction des exercices du 25/09/2023 (Séries)

Ex 1 : CV de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$.

Correction : On constate que $2^n = e^{\ln(2)n}$, donc $n^{1/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{\ln(2)n})$, puis $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$. Ainsi $\displaystyle\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{3/2}}{2^n}$. On a : $\displaystyle n^2\frac{n^{3/2}}{2^n} = \frac{n^{5/2}}{e^{\ln(2)n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par croissance comparée. On a donc : $\displaystyle\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$ converge.

Ex 2 : CV de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Correction : On a : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-1/n^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}\right) =$
$\displaystyle\frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2}\right) =$
$\displaystyle\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) - \left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ converge.

Ex 3 : CV de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$;

puis la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Correction :

Pour $\alpha<0$, , on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = +\infty$, donc pour n impair grand, $\displaystyle 1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est strictement négatif et donc tous les termes de la série ne sont pas définis à partir d'un certain rang. Ainsi la série n'est pas définie.

On se place maintenant dans le cas $\alpha>0$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$. On a donc :

$\displaystyle\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

On pose $\displaystyle v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\displaystyle w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

La suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante et de limite nulle, donc grâce au TSSA, $\sum v_n$ converge. Par ailleurs, on a $\displaystyle w_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, donc par comparaison de séries à termes négatifs APCR, $\sum w_n$ converge si et seulement si $2\alpha>1$ si et seulement si $\alpha>1/2$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha>1/2$.

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{n=2}^{2N+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{p=1}^{N}\ln\left(1+\frac{(-1)^{2p}}{2p}\right) + \sum_{p=1}^{N}\ln\left(1+\frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right) =$

$$\sum_{p=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right) + \sum_{p=1}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{2p+1}\right) = \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) + \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p}{2p+1}\right) =$$

$$\sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) = 0.$$

Comme la série converge (ici $\alpha = 1$), alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}_{=0} = 0.$$