1. ***a.*** **À SAVOIR FAIRE PAR COEUR EN 2 SECONDES**

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (1-\sin^2 t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin t}_{u(t)} \times \underbrace{\sin t (\cos t)^n}_{v'(t)}\, dt \\
&= I_n - \left(\left[\underbrace{\sin t}_{u(t)} \underbrace{\frac{-1}{n+1}(\cos t)^{n+1}}_{v(t)} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t}_{u'(t)} \underbrace{\frac{-1}{n+1}(\cos t)^{n+1}}_{v(t)}\, dt \right) \\
&= I_n - [0-0] - \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2}\, dt \\
&= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}, \text{ d'où} \\
(n+1) I_{n+2} &= (n+1) I_n - I_{n+2}, \text{ finalement :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n}$$

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2(p-1)}$. En réitérant le procédé sur $I_{2(p-1)}$, on a : $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p}\dfrac{2p-3}{2p-2} I_{2(p-2)}$ et en poursuivant jusqu'à I_0, on a : $I_{2p} = \dfrac{(2p-1)\times(2p-3)...\times 1}{(2p)\times(2p-2)...\times 2} I_0$.
On voit dans la fraction que l'on a le produit de tous les nombres impairs entre 1 et $2p-1$ au numérateur. En multipliant la fraction en haut et en base par le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2p$, on a : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{((2p)\times(2p-2)...\times 2)^2} I_0$. Par ailleurs dans $(2p)\times(2p-2)...\times 2$, en factorisant chacun des p facteurs par 2, on obtient :
$(2p)\times(2p-2)...\times 2 = 2^p(p\times(p-1)...\times 1) = 2^p p!$ et donc :
$((2p)\times(2p-2)...\times 2)^2 = (2^p p!)^2 = 2^{2p}(p!)^2 = (2^2)^p(p!)^2 = 4^p(p!)^2$.
On remarque que $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^0 x dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2(p-1)+1}$. En réitérant le procédé sur $I_{2(p-1)+1}$, on a : $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1}\dfrac{2p-2}{2p-1} I_{2(p-2)+1}$ et en poursuivant jusqu'à I_1, on a :
$I_{2p+1} = \dfrac{(2p)\times(2p-2)...\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)...\times 3} I_1$.
On voit dans la fraction que l'on a le produit de tous les nombres impairs entre 1 et $2p+1$ au dénominateur. En multipliant la fraction en haut et en base par le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2p$, on a : $I_{2p+1} = \dfrac{((2p)\times(2p-2)...\times 2)^2}{(2p+1)!} I_1$. Comme précédemment, on a : $((2p)\times(2p-2)...\times 2)^2 = 4^p(p!)^2$.

Par ailleurs $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 1$. On en déduit :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}}$$

2. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)$
$= \ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) + \ln(e) = -\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) + 1 = -\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) + 1 =$
$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 =$
$-1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

b. La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge (absolument) grâce à la question précédente, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. Or nous avons : $\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^{u_n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^{\ell} > 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \text{ existe et elle est strictement positive}}$$

Et donc :

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R}_+^*,\ n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

3. ***a.*** En utilisant les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1}, on a : $I_{2p}I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$\boxed{I_{2p}I_{2p+1} \sim \frac{\pi}{4p}}$$

b. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car :
$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x(\sin(x) - 1)dx$. Or la fonction $\sin$ est positive sur $[0, \pi/2]$ et la fonction $\sin -1$ est négative sur ce même intervalle.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}}$$

c. Grâce à la question **1.a.** nous avons : $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+2}$. Comme I_{2p} est strictement positif, alors en divisant par I_{2p} dans les inégalités précédentes, on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$, soit : $\frac{2p+1}{2p+2} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$. En passant à la limite, on a : $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ et donc :

$$\boxed{I_{2p} \sim I_{2p+1}}$$

d. Les questions **3.a.** et **3.c.** donnent : $I_{2p}^2 \sim \dfrac{\pi}{4p}$. En utilisant la question **2.b.**, on a aussi $I_{2p}^2 \sim \left(\dfrac{C(2p)^{2p+\frac{1}{2}} e^{-2p}}{4^p C^2 p^{2p+1} e^{-2p}}\right)^2 \times \dfrac{\pi^2}{4} = \left(\dfrac{2^{2p+\frac{1}{2}} p^{2p+\frac{1}{2}}}{2^{2p} C p^{2p+1}}\right)^2 \times \dfrac{\pi^2}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}}\right)^2 \times \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{2C^2 p}$. En identidiant les deux équivalents, on a : $\dfrac{\pi^2}{2C^2} = \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$.

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$