Correction des exercices du 02/10/2023 (Algèbre linéaire)

Ex 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $P_i = (X-a)^i$.

1. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $f : P \mapsto (X-a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver son noyau et son image.

Correction :

1. $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de degré échelonné, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
Or $card(P_0, ..., P_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, alors $\underline{(P_0, ..., P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.
2. Supposons d'abord $n \geq 2$.
On a $f(P_0) = f(1) = 0$, puis $f(P_1) = (X-a)(1-1) - 2(X-a) = -2(X-a)$ et pour $i \in [\![2, n]\!]$, on a $f(P_i) = (X-a)(i(X-a)^{i-1} - i(a-a)^{i-1}) - 2((X-a)^i - (a-a)^i) = i(X-a)^i - 2(X-a)^i = (i-2)(X-a)^i$ (bien noter que $0^{i-1} = 0$, car $i - 1 \geq 1$).
Comme $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $\mathrm{Im}\,(f) = vect(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3), ..., f(P_n)) = vect(0, -2(X-a), 0, (X-a)^3, ..., (n-2)(X-a)^n) = vect((X-a), (X-a)^3, (X-a)^4, ..., (X-a)^n) = vect(P_1, P_3, P_4, ..., P_n)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = vect(P_1, P_3, P_4, ..., P_n)}$$

Ainsi on a $\mathrm{rg}\,(f) = n + 1 - 2$, car $(P_1, P_3, P_4, ..., P_n)$ est libre (de degré échelonné), puis grâce au théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}\,(f) = n + 1 - (n-1) = 2$.
Or $f(P_0) = f(P_2) = 0$, puis (P_0, P_2) est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(f)$ (de degré échelonné) et $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 2$, alors (P_0, P_2) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = vect(P_0, P_2)}$$

Pour $n = 1$, on a $f(P_0) = 0$ et $f(P_1) = -2(X-a)$, avec $\mathrm{Im}\,(f) = vect((X-a)) = vect(P_1)$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = vect(P_0)$, par les mêmes raisonnements.

Pour $n = 0$, alors pour $P \in \mathbb{K}_0[X]$, le polynôme P est constant, puis $f(P) = 0$, donc $f = 0$.

Ex 2 : Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v = E$.
2. Montrer que $v \circ u$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, v$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$.

Correction :

1. Montrons que : $\forall x \in E, \exists!(a, b) \in \mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Im}\, v, x = a + b$.
Soit $x \in E$.
<u>Analyse :</u> Soit $(a, b) \in \mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Im}\, v$ une éventuelle solution.
On a $x = a + b$. Il existe $c \in E$ tel que $b = v(c)$. On a donc : $x = a + v(c)$, puis :
$u(x) = u(a) + uv(c) = 0 + c = c$, car on a : $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
Ainsi $b = vu(x)$, puis $a = x - vu(x)$.
<u>Examen :</u> On pose $b = vu(x)$, puis $a = x - vu(x)$.
   - $a + b = x$.
   - $b = v(u(x)) \in \mathrm{Im}\,(u)$.
   - $u(a) = u(x) - \underbrace{uv}_{=Id_F} u(x) = u(x) - u(x) = 0$, donc : a est dans $\mathrm{Ker}\,(u)$.

On a donc

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v = E}$$

2. Grâce à la question précédente, la décomposition de x dans $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$ est $x = \underbrace{(x - vu(x))}_{\in \operatorname{Ker}(u)} + \underbrace{vu(x)}_{\in \operatorname{Im}(u)}$.

   Ainsi $vu(x)$ est la composante de x sur $\operatorname{Im}(u)$, ainsi $\underline{v \circ u \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} v \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker} u}$.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 3 : Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes positifs telles que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, avec $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < \beta$.

1. Justifier l'existence d'un entier N tel que : $\forall n \geq N$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.
2. En déduire que $a_n = O(b_n)$.
3. En déduire que si $\lambda < -1$, alors $\sum a_n$ converge et si $\lambda > -1$, alors $\sum a_n$ diverge (on pourra choisir $b_n = 1/n^\beta$).

ATTENTION il y avait une erreur d'énoncé dans la troisième question.

Correction :

1. Fait en TD
2. Fait en TD
3. On pose $b_n = 1/n^\beta$, on choisira plus tard un β adéquat. On a : $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{(n+1)^{-\beta}}{n^{-\beta}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   - Si $\lambda < -1$: On veut β tel que $\beta > 1$ et $-\beta > \lambda$, soit $1 < \beta < -\lambda$ (cela est possible, car $-\lambda > 1$). On pose donc $\beta = \dfrac{1-\lambda}{2}$.
     On a $\beta > 1$ et $-\beta > \lambda$. En utilisant la deuxième question on a : $a_n = O(b_n)$. Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum b_n$ converge, alors

     $$\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$$

   - Si $\lambda > -1$: On veut β tel que $\beta < 1$ et $-\beta < \lambda$, soit $-\lambda < \beta < 1$ (cela est possible, car $-\lambda < 1$). On pose donc $\beta = \dfrac{1-\lambda}{2}$.
     On a $\beta < 1$ et $-\beta < \lambda$. En échangeant les rôles de a_n et b_n, on a grâce la deuxième question on a : $b_n = O(a_n)$. Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum b_n$ diverge, alors

     $$\boxed{\sum a_n \text{ diverge}}$$

Ex 4 : Étude de la CV de $\sum u_n$, avec $u_n = \left(1 - \dfrac{(\ln n)^\beta}{n}\right)^n$. C'est le cas $\alpha = 1$ de l'exercice 13 numéro **20.**.

Correction : On a : $u_n = e^{n\ln\left(1-\frac{(\ln n)^\beta}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{(\ln n)^\beta}{n}+o\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n}\right)\right)} = e^{-(\ln n)^\beta + o\left((\ln n)^\beta\right)}$.

Premier cas : $\beta < 1$. On a : $\dfrac{1}{nu_n} = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{u_n} = e^{-\ln(n)+(\ln n)^\beta+o\left((\ln n)^\beta\right)}$. Or : $-\ln(n)+(\ln n)^\beta+o\left((\ln n)^\beta\right) = -\ln(n)\left[1-(\ln n)^{\beta-1}+o\left((\ln n)^{\beta-1}\right)\right]$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n)^{\beta-1} = 0$. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n)\left[1-(\ln n)^{\beta-1}+o\left((\ln n)^{\beta-1}\right)\right] = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{nu_n} = 0$ et donc : $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$, puis par comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$

Deuxième cas : $\beta > 1$

On a $n^2u_n = e^{2\ln(n)-(\ln n)^\beta+o\left((\ln n)^\beta\right)}$. Or : $2\ln(n)-(\ln n)^\beta+o\left((\ln n)^\beta\right) = (\ln(n))^\beta\left[\dfrac{2}{(\ln(n))^{\beta-1}}-1+o(1)\right]$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\ln(n)-(\ln n)^\beta+o\left((\ln n)^\beta\right)\right] = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = -\infty$, puis $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

Troisième cas : $\beta = 1$ On a : $u_n = e^{-\ln n + o(\ln n)}$ Comme on ne peut pas passer aux équivalents dans les exponentielles, il faut aller plus loin dans le développement asymptotique.
$u_n = e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{\ln n}{n}-\frac{(\ln n)^2}{n^2}+o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)\right)} = e^{-\ln n-\frac{(\ln n)^2}{n}+o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)} = e^{-\ln n}e^{-\frac{(\ln n)^2}{n}+o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{(\ln n)^2}{n}+o\left(\dfrac{(\ln n)^2}{n}\right)\right] = 0$, par croissance comparée, alors par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{(\ln n)^2}{n}+o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)} = 1$, donc $e^{-\ln n}e^{-\frac{(\ln n)^2}{n}+o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \dfrac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$