1 Espaces vectoriels, applications linéaires et sous-espaces vectoriels

1.1 Sous-espaces vectoriels

Les espaces vectoriels connus sont : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

1.1.1 Méthodes pour montrer que l'on a un sous-espace vectoriel

Définition 1.1.1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

$$0_E \in F \quad et \quad (\mathcal{C}_1) : \quad \forall x,\, y \in F,\, \forall \lambda \in \mathbb{K},\, \lambda x + y \in F.$$

De plus F hérite de la structure d'espace vectoriel de E.

Proposition 1.1.1 (Noyau et Image) *Soit $f\ :\ E \to F$ une application linéaire.*

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x),\ x \in E\}$ *est un sous-espace vectoriel de F.*
2. $\mathrm{Ker}\,(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple 1.1.1 $F = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(0) = P(1) = P'(2) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$*

Définition 1.1.2 (Sous-espace vectoriel engendré par une famille) *Si $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E, alors : $vect((e_i)_{i\in I}) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i e_i / \forall i \in I,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, avec dans la somme un nombre fini de termes non nuls.*

Exemple 1.1.2 $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = vect\left((E_{ij} - E_{ji})_{1\leq i<j\leq n}\right)$ *et* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = vect\left(((E_{ij} - E_{ji})_{1\leq i<j\leq n}, (E_{ii})_{1\leq i\leq n})\right)$.

1.1.2 Sommes d'espaces vectoriels

Définition 1.1.3 (Somme de sous-espaces vectoriels) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme des E_i que l'on note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ l'ensemble*

$$E_1 + ... + E_p = \sum_{i=1}^{p} E_i = \{x_1 + x_2 + ... + x_p,\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in E_i\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.1.4 (Somme directe) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$, l'écriture sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, avec les x_i dans E_i est unique, ce qui est équivalent à :*

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i, \exists!(x_1, ..., x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

La somme est alors notée $\sum_{i=1}^{p} E_i = \bigoplus_{1\leq i\leq p} E_i$.

Proposition 1.1.2 (Base adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1,\dots,E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $i\in[\![1,p]\!]$ et $\mathcal{B}_i$ une base de E_i. Alors la famille $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,...,\mathcal{B}_p)$ obtenue en juxtaposant les $\mathcal{B}_i$ est une base de E. Cette base est dite* ***adaptée à*** *$E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.*

Proposition 1.1.3 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels) *La somme $E'+E''$ est direct si et seulement si $E'\cap E''=\{0\}$.*

Remarque 1.1.1 *Attention, cela n'est valable que pour deux sous-espaces vectoriels.*

Définition 1.1.5 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) *On dit que E' et E'' sont supplémentaires dans E si : $E'\oplus E''=E$.*

Exemple 1.1.3 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.1.4 (Existence d'un supplémentaire) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède au moins un supplémentaire dans E (c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel S de E tel que : $E=F\oplus S$).*

1.1.3 Hyperplans

Soient E un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose $E\neq\{0_E\}$.

Définition 1.1.6 (Hyperplan) *Soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E s'il existe un forme linéaire $\varphi\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ non nulle, telle que $H=\operatorname{Ker}\varphi$.*
Dans ce cas, $H=\{x\in E,\ \varphi(x)=0\}$, ce qui définit une équation de l'hyperplan H.

Proposition 1.1.5 (Hyperplans et équations en dimension finie) *Soient $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un n-uplet non nul $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $H=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E \Big/ \sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0\right\}$.*

Proposition 1.1.6 (Caractérisation géométrique des hyperplans) *Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalences :*
- *H est un hyperplan de E.*
- *H est supplémentaire d'une droite de E, c'est-à-dire il existe une droite vectorielle D telle que $E=H\oplus D$.*

Dans ce cas, toute droite D' non contenue dans H vérifie : $E=H\oplus D'$.

Exemple 1.1.4 *Soient $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\{f\in E,\ f(3)=0\}$ et $G=\{x\mapsto\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$. F est un hyperplan en tant que noyau de $\varphi: f\mapsto f(3)$ et $E=F\oplus G$.*

Corollaire 1.1.1 (Caractérisation géométrique des hyperplans en dimension finie) *Si E est de dimension n (avec n dans $\mathbb{N}^*$), alors les hyperplans sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.*

1.1.4 Algèbres

Définition 1.1.7 (Structure d'algèbre) *Un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois de composition interne $+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et $\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, et d'une loi $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ externe, est une algèbre lorsque :*

1. *$(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.*
2. *$(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
3. *Les lois $\times$ et $\cdot$ sont compatibles : $\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x,y) \in \mathcal{A}^2$, $\ (a \cdot x) \times (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \times y)$.*

On note usuellement $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$.

Exemple 1.1.5 $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$.

Définition 1.1.8 (Sous-algèbre) *Un ensemble $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre d'une algèbre $\mathcal{A}$ lorsque $\mathcal{B}$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.*

Exemple 1.1.6 *$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

1.2 Familles libres, génératrices, bases

Définition 1.2.1 (Famille libre)

1. *Une famille$(e_i)_{i\in I}$ de E est dite libre si la combinaison linéaire nulle s'obtient pour cette famille qu'avec des coefficients nuls, soit :*
$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \ \left[\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in I, \ \lambda_i = 0) \right].$$
2. *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est liée si elle n'est pas libre. Les vecteurs sont linéairement dépendants, soit :*
$$\exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \ \left[\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\exists i \in I, \ \lambda_i \neq 0) \right].$$

Exemple 1.2.1

1. *Familles de polynômes de degré échelonné.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ et $f^p(x_0) = 0$. Alors $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre.*

Définition 1.2.2 (Famille génératrice) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que la famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ forme une famille génératrice de F, si : $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I}) = F$. Autrement dit, tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire finie de $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$, avec $i_1, ..., i_n$ dans I et on dit que F est engendré par la famille $(e_i)_{i\in I}$.*

Définition 1.2.3 (Bases) *Soit $\mathcal{B}$ une famille de E. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.*
Ceci est équivalent à dire que tout vecteur x de E s'écrit d'une unique façon : $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, avec : $\forall i \in I, \ \lambda_i \in \mathbb{K}$.
$(\lambda_i)_{i\in I}$ est appelée la famille des coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple 1.2.2

1. *On pose $E = \mathbb{K}^n$ et $\varepsilon_1 = (1,0,0,...,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,...,0), ..., \varepsilon_n = (0,0,...,0,1)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*
2. *On pose $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ (avec E_{ij} la matrice qu'avec des 0 sauf en ligne i et colonne j où l'on a un 1) est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
3. *$(1, X, X^2, ..., X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Proposition 1.2.1 (Extraction d'une base) *Si $(x_i)_{1\le i\le n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, avec I un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$, alors il existe une partie J telle que : $I \subset J \subset [\![1,n]\!]$ telle que $(x_j)_{j\in J}$ soit une base de E.*
En particulier, de toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base.

Proposition 1.2.2 (Théorème de la base incomplète) *Soit $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille libre de E de dimension finie. Alors on peut compléter cette famille en une famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ qui est une base de E, avec $n \geq p$.*

Proposition 1.2.3 (Caractérisation de la bijectivité, injectivité et surjectivité) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.*
Alors f est bijective (resp. injective, surjective) si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base (resp. une famille libre, génératrice).

Proposition 1.2.4 (Caractérisation d'une application par l'image d'une base) *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$ telles que : $\forall i \in I,\ f(e_i) = g(e_i)$. Alors on a : $f = g$.*

Proposition 1.2.5 (Image et famille génératrice) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors on a : $\mathrm{Im}\,(f) = vect((f(e_i))_{i\in I})$.*

Exemple 1.2.3 *On considère l'endomorphisme f qui à tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme $f(P) = \dfrac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P$. La famille $(f(1), f(X^3), f(X^4), ..., f(X^n))$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.*

1.3 Dimension

Définition 1.3.1 (Dimension d'un espace vectoriel) *Le nombre d'éléments d'une base de E est appelé dimension de E que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$. Par convention $\dim\{0\} = 0$.*

Exemple 1.3.1 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{L}(E,F) = \dim(E)\dim(F)$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Proposition 1.3.1 (Cardinal d'une famille libre et génératrice) *On suppose E de dimension finie égale à n.*

1. *Toute famille libre possède au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.*
3. *Si une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E possède p vecteurs avec $p > n = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est liée.*
4. *Si $F = vect(f_1, ..., f_p)$, alors $\dim(F) \leq p$. On a l'égalité si et seulement si $(f_1, ..., f_p)$ est libre.*

Proposition 1.3.2 (Caractérisation des bases) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec n non nul. Soit $\mathcal{B}$ une famille finie de E. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{B}$ est une base de E.*
2. *$\mathcal{B}$ est libre et $card(\mathcal{B}) = n$.*
3. *$\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E et $card(\mathcal{B}) = n$.*

Exemple 1.3.2 *$(1, (X+i), ..., (X+i)^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Un choix judicieux de base permet de résoudre des problèmes comme la recherche de $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P = (X+i)P'$.*

Proposition 1.3.3 (Dimension d'un produit) *Soient $(E_1, +, \cdot), (E_2, +, \cdot), ..., (E_p, +, \cdot)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectives $n_1, ..., n_p$. Alors $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est de dimension finie et*

$$\dim(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

Proposition 1.3.4 (Sous-espace vectoriel et dimension)

1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et on a : $\dim(F) \leq \dim(E)$.*
2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si on a : $\dim(F) = \dim(E)$, alors $E = F$*

Exemple 1.3.3 *Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{Ker} f^{k_0} = \operatorname{Ker} f^{k_0+1}$, *puis* $\forall k \geq k_0$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k_0}$.

Théorème 1.3.1 (Formule de Grassmann) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $E' + E''$ est de dimension finie et :* $\dim(E' + E'') = \dim(E') + \dim(E'') - \dim(E' \cap E'')$.

Exemple 1.3.4 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que* $\dim(F) + \dim(G) > n$, *alors :* $F \cap G \neq \{0\}$.

Proposition 1.3.5 (Dimension d'une somme) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.*

1. *On a :* $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.
2. *La somme* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe si et seulement si :* $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Définition 1.3.2 (Rang d'une famille de vecteurs) *On appelle rang d'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ la dimension de l'espace engendré vect* $((x_i)_{1 \leq i \leq p})$.

1.4 Applications linéaires

1.4.1 Généralités

Définition 1.4.1 (Application linéaire) *E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Remarque 1.4.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Proposition 1.4.1 (Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité)

1. *f est surjective si et seulement si on a* $\operatorname{Im}(f) = F$.
2. *f est injective si et seulement si on a :* $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Remarque 1.4.2

1. $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker}(u)$.
2. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$.
3. $v \circ u = 0$ *si et seulement si* $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$.

Proposition 1.4.2 (L'application linéaire réciproque)

1. *Soient f et h des isomorphismes de E dans F.*
   (a) *Alors f^{-1} est une application linéaire de F dans E.*
   (b) *Si $E = F$, alors $f \circ h$ est dans $GL(E)$ et :* $(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$.
2. *f est dans $GL(E)$ signifie qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id_E$. Dans ce cas, on a :* $g = f^{-1}$.

Remarque 1.4.3 *Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, si $fg = gf$, alors :*

1. $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$.

2. $f^n - g^n = (f-g)(f^{n-1} + f^{n-2}g + ... + fg^{n-2} + g^{n-2})$.

Exemple 1.4.1 *Pour* $f \in \mathcal{L}(E)$, *si* $f^p = 0$, *alors* $(Id_E - f)^{-1} = Id_E + f + ... + f^{p-1}$.

Définition 1.4.2 (Sous-espace stable) *Soient* X *un sous-ensemble de* E *et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* X *est stable par* f *si on a :* $f(X) \subset X$.

Définition 1.4.3 (Endomorphisme induit) *Soit* G *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* f *avec* f *dans* $\mathcal{L}(E)$. *On définit* $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$. *On dit que* $\tilde{f}$ *est l'endomorphisme induit par* f *sur* G.

Proposition 1.4.3 (Stabilité et endomorphismes qui commutent) *Pour* $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *tels que* $fg = gf$, *les espaces* $\mathrm{Im}\,(f)$ *et* $\mathrm{Ker}\,(f)$ *sont stables par* g.

1.4.2 Applications linéaires en dimension finie

Définition 1.4.4 (Rang d'une application linéaire) E *et* F *désignent deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels (de dimension finie ou non) et* f *un élément de* $\mathcal{L}(E, F)$.
On suppose que $\mathrm{Im}\, f$ *est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de* f, *la dimension de* $\mathrm{Im}\, f$.
On note $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(f(E))$.

Théorème 1.4.1 (Théorème du rang) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie,* F *un* $\mathbb{K}$*-ev et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Alors* $\mathrm{Im}\, f$ *est de dimension finie et :*

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(E).$$

Exemple 1.4.2 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$.
On a : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

Proposition 1.4.4 (Caractérisation de la bijectivité et dimension) *On suppose que* $\underline{n = \dim(E) = \dim(F)}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est injective.*
2. f *est surjective.*
3. f *est bijective.*
4. *L'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
5. $rg(f) = n$.

Exemple 1.4.3 *Polynômes interpolateurs de Lagrange : Soit* $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), ..., P(a_{n+1})) \end{array} \right.$, *avec* $a_1, ..., a_{n+1}$ *dans* $\mathbb{K}$ *deux à deux distincts.*

1. Φ *est un isomorphisme.*
2. *Il existe une unique famille* $(L_1, ..., L_{n+1})$ *de* $\mathbb{K}_n[X]$ *telle que :* $\forall i, j \in [\![1, n+1]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
   On a : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n+1} \frac{X - a_p}{a_k - a_p}$.
3. $(L_1, ..., L_{n+1})$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 1.4.5 (Rang et composition par un isomorphisme) *La composition par un isomorphisme ne change pas le rang.*

1.4.3 Projecteurs et symétries

Définition 1.4.5 (Projection) *E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($E' \oplus E'' = E$).Tout élément x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x' + x''$ avec (x', x'') dans $E' \times E''$. On appelle la projection sur E' parallélement à E'' l'application*

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' \end{array} \right. .$$

Ainsi $x = \underbrace{p(x)}_{\in E'} + \underbrace{x - p(x)}_{\in E''}$.

Proposition 1.4.6 (Propriétés des projections) *Soit p la projection sur E' parallélement à E''.*

1. $\operatorname{Im} p = E'$ *et* $\operatorname{Ker} p = E''$
   Ainsi on a : $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$.
2. $x \in \operatorname{Im}(p) \Longleftrightarrow p(x) = x$.
3. $p^2 = p$
4. *Dans une base adaptée à $E' \oplus E'' = E$, la matrice de p est $diag(1, ..., 1, 0, ..., 0)$.*

Remarque 1.4.4 $\operatorname{rg}(p) = tr(p)$.

Définition 1.4.6 (Symétrie) *E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($E' \oplus E'' = E$). Tout élément x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x' + x''$ avec (x', x'') dans $E' \times E''$. On appelle la symétrie sur E' parallélement à E'' l'application*

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' - x'' \end{array} \right. .$$

Remarque 1.4.5 *Soit p la projection sur E' parallélement à E''. Alors $s = 2p - Id_E$.*

Proposition 1.4.7 (Propriétés des symétries) *Soit s la symétrie sur E' parallélement à E''. Alors :*

1. $E' = \{x \in E / s(x) = x\} = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$ *et* $E'' = \{x \in E / s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$.
2. $s^2 (= s \circ s) = Id_E$.
3. *Dans une base adaptée à $E' \oplus E'' = E$, la matrice de s est $diag(1, ..., 1, -1, ..., -1)$.*

1.5 Application nilpotentes

Définition 1.5.1 (Endomorphisme nilpotent) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.*

Remarque 1.5.1 *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents. f n'est pas bijective, et si $fg = gf$, alors fg et $f + g$ sont nilpotents.*

Définition 1.5.2 (Indice de nilpotence) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est d'indice de nilpotence p si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.*

Proposition 1.5.1 (Majoration de l'indice de nilpotence) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice de nilpotence p. Alors $p \leq \dim(E)$. En particulier $f^{\dim(E)} = 0$.*

2 Matrices

2.1 Opérations

Définition 2.1.1 (Mulitplication) *Soit* $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq \boldsymbol{q}}} \in \mathcal{M}_{r,\boldsymbol{q}}(\mathbb{K})$ *et* $B = [b_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq \boldsymbol{q}\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{q},p}(\mathbb{K})$. *On appelle produit matriciel de* A *par* B *la matrice de* $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ *notée* AB *définie par* $AB = [c_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq p}}$ *avec* $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j}$.

<u>Disposition pratique :</u>

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & \boxed{b_{k,j}} & \cdots & b_{k,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & \cdots & \boxed{b_{q,j}} & \cdots & b_{q,p} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i,1}} & \cdots & \boxed{a_{i,k}} & \cdots & \boxed{a_{i,q}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,k} & \cdots & a_{r,q} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{r,1} & \cdots & c_{r,j} & \cdots & c_{r,p} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple 2.1.1 *Soit* $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, *avec les* λ_i *deux à deux distincts. Alors* $MD = DM$ *implique que* M *est diagonale.*

Remarque 2.1.1 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AB = BA$. *Alors :*

1. $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.
2. $A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + ... + AB^{p-2} + B^{p-1})$.

Exemple 2.1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = (I_2 + N)^k = I_2 + kN.$

Proposition 2.1.1 (Multiplication des éléments de la base canonique) *Soient* $(i,j,k,l) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]^2 \times [\![1,p]\!]$. *On a* $E_{ij}E_{kl} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Définition 2.1.2 (Transposée) *Soit* $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle transposée de* A *la matrice de* $\mathcal{M}_{\boldsymbol{p,n}}(\mathbb{K})$ *notée* A^T *et définie par* $A^T = [a'_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ *avec* $a'_{ij} = a_{ji}$.

Proposition 2.1.2 (Opération et transposition) *Soient* $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors on a :*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. $(A^T)^T = A$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition 2.1.3 (Trace d'une matrice) *Soit* $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On appelle trace de* A *le scalaire* $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, *qui est la somme des éléments diagonaux de* A.

Exemple 2.1.3 *Soit* $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* $tr(\overline{M}^T M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |m_{k,i}|^2$.

Proposition 2.1.3 (Opérations sur la trace)

1. *Pour* $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *et* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, *on a :* $tr(\lambda A + \mu B) = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$ *(la trace est une forme linéaire de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*).*
2. *Pour* $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, *on a :* $tr(AB) = tr(BA)$.
3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $tr(A) = tr(A^T)$.

Exemple 2.1.4 *Soit* $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. *On pose* $M = CL$ *et donc :* $M^2 = tr(M)M$.

2.2 Matrices remarquables

Définition 2.2.1 (Matrices antisymétriques et symétriques) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On dit que A est symétrique si $A^T = A$ et on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques. Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique, alors : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = a_{ji}$.*
- *On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est antisymétrique, alors : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = -a_{ji}$.*

Définition 2.2.2 (Matrices triangulaires)

1. *$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure, quand :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j < i \Longrightarrow a_{ij} = 0,\ \text{c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficient dans $\mathbb{K}$.

2. *$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure, quand :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0,\ \text{c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures à coefficient dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.2.1 (Opérations et matrices triangulaires)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.2 (Produit par blocs) *Soient $A \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$. Alors on a :*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.1 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$ *si A et D sont inversibles.*

Définition 2.2.3 (Matrices nilpotentes) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.*

Reprendre les définitions et le propriétés pour les endomorphismes nilpotents (somme, produit, indice de nilpotence,...)

2.3 Rang

Définition 2.3.1 (Rang) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, ..., C_p$ ses vecteurs colonnes et $L_1, ..., L_n$ ses lignes. On pose $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, ..., C_p) = \mathrm{rg}\,(L_1, ..., L_n)$.*

Exemple 2.3.1 $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & 2 \\ 1 & & & & & 2 \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ 1 & & & & & 2 \end{pmatrix} = 2.$

Proposition 2.3.1 (Invariance du rang par transposition) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a : $rg(A) = rg(A^T)$.*

Proposition 2.3.2 (Rang d'une matrice/rang d'une application linéaire) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective p et n et de base respective $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$. Alors $rg(f) = rg(A)$.*

Remarque 2.3.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous avons aussi un théorème du rang pour les matrices :* $\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) + \mathrm{rg}\,(A) = p$.

Pour obtenir le rang d'une matrice, on utilise la méthode du pivot de Gauss, pour obtenir une matrice échelonnée en ligne ou colonne, en faisant des opérations élémentaires qui laissent invariant le rang :

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $i \neq j$, avec λ dans $\mathbb{K}$.
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$, $i \neq j$.

Proposition 2.3.3 (Matrices équivalentes à J_r) *Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. Alors* $\mathrm{rg}\, M = r$ *si et seulement s'il existe deux matrices $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $M = QJ_rP$.*

Exemple 2.3.2 $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\,(A) + \mathrm{rg}\,(B)$.

Définition 2.3.2 (Matrice extraite) *Soient $A = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$. La matrice $B = (a_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ est une matrice extraite de A.*

Proposition 2.3.4 (Rang et matrices extraites) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées extraites inversibles de A.*

2.4 Inversibilité

Définition 2.4.1 (Matrice inversible) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que l'on ait : $AB = I_n$ ou $BA = I_n$. La matrice B est appelée l'inverse de la matrice A et est notée A^{-1}. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et on l'appelle groupe linéaire d'ordre n.*

Remarque 2.4.1

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel qu'il existe B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou C dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $AB = 0$ ou $CA = 0$. Alors A n'est pas inversible.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. On a : $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.*

Proposition 2.4.1 (Opérations sur l'inverse) *Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$.*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. *A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Proposition 2.4.2 (Inverse d'une matrice 2×2) *Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible, alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Proposition 2.4.3 (Caractérisation de l'inversibilité) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *A est inversible.*
- $\mathrm{rg}\,(A) = n$.
- $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$.
- $\det(A) \neq 0$.

Exemple 2.4.1 *Utilisation du noyau pour $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$:*

$$\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} |a_{ij}|\right) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Le calcul de l'inverse d'une petite matrice se fait par la méthode du pivot de Gauss à l'aide d'opérations élémentaires.

Pour déterminer l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$, on considère le système $AX = Y$ avec $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ quelconque fixé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ l'inconnue.

Exemple 2.4.2 *Inverser* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$.

2.5 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 2.5.1 (Matrice d'une famille de vecteurs) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Soit $(x_j)_{1\leq j\leq p}$ une famille de vecteurs de E.*

On a : $\forall j \in [\![1,p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i$, où a_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur x_j dans la base $\mathcal{U}$.

On appelle matrice de la famille $(x_j)_{1\leq j\leq p}$ dans la base $\mathcal{U}$ la matrice

$$Mat_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_p) = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_p \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Proposition 2.5.1 (Matrice inversible et base) *Soit $\mathcal{U}$ une base de E. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille de E et on pose $A = Mat_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_p)$.*
Alors $(x_1,...,x_p)$ est une base de E si et seulement si A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Définition 2.5.2 (Matrice de passage) *On note $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{U}'$.*

En particulier, nous avons $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = Mat_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}(Id_E)$, car : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ Id_E(u'_j) = u'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_j$.

Proposition 2.5.2 (Inversibilité de la matrice de passage) *La matrice $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} = P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}$.*

Proposition 2.5.3 (Changement de base pour des vecteurs) *Soit x dans E. Il existe $x_1,...,x_n$ et $x'_1,...,x'_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que*

$x = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j u'_j$. On pose $X = Mat_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = Mat_{\mathcal{U}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Alors on a : $X = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} X'$.

2.6 Matrice d'une application linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour j dans $[\![1, p]\!]$, on a $f(u_j)$ dans $F = vect(v_1, ..., v_n)$ et on peut écrire $f(u_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, où a_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{V}$.

Définition 2.6.1 (Matrice d'une application linéaire) *La matrice* $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *est la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *et est notée* $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$. *On a :*

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f(u_1) & f(u_2) & & f(u_j) & & f(u_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

On note $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f) = Mat_{\mathcal{U}}(f)$.

Définition 2.6.2 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) *On peut identifier canoniquement* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *avec* $\mathbb{K}^n$, *c'est-à-dire que l'on identifie la colonne* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *avec le* n*-uplet* $(x_1, ..., x_n)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. *L'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ *s'indentifie canoniquement à une application linéaire de* $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. *On dit que* f *est l'application linéaire canoniquement associée à* A.
Ainsi A *est la matrice de* f *dans les base canoniques de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2.6.1 *La matrice de l'endomorphisme* $P \mapsto P(X+1)$ *est* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.6.1 (Lien entre opérations matricielles et applications linéaires)

1. *Pour* f *et* g *dans* $\mathcal{L}(E, F)$ *et* λ *dans* $\mathbb{K}$, *on a :*
   $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f+g) = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) + Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$ *et* $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\lambda f) = \lambda Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.
2. *Soient* E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives* $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$, $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ *et* $\mathcal{W} = (w_j)_{1 \leq j \leq q}$.
   Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ *et* $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *et* $B = Mat_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g) = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}$.
   Alors $BA = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$ *avec* $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$.
   Ainsi on a $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g) Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.

Exemple 2.6.2 *Soit* $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *calculer* M_n^n *en considérant la base canonique de l'endomorphisme canoniquement associé.*

Proposition 2.6.2 (Matrice inversible et application) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{U} = (u_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et on pose $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.*
Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas : $Mat_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

Proposition 2.6.3 (Image d'un vecteur par une application linéaire) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{U} = (u_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et on pose $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.*

Soient $x \in E$ et $y \in F$. Il existe $x_1, ..., x_p$ et $y_1, ..., y_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j=1}^{p} x_j u_j$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$. On pose $X = Mat_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y = Mat_{\mathcal{V}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On a : $y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX$

Définition 2.6.3 (Image et noyau d'une matrice) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

1. *On appelle noyau de A qui est noté $\mathrm{Ker}\, A$ l'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0\}$ que l'on peut identifier à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*
2. *On appelle image de A que noté $\mathrm{Im}\,(A)$ l'ensemble $\{AX,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ (qui est inclus dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) et que l'on identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*
3. *$\mathrm{Im}\,(A)$ est engendré par les colonnes de A ($\mathrm{Im}\,(A) = vect(C_1, ..., C_p)$ avec $C_1, ..., C_p$ les colonnes de A).*

Proposition 2.6.4 (Changement de base pour une application linéaire) *Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et on pose $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f)$.*
$A' = Mat_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f) = (P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'})^{-1} Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = (P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'})^{-1} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$.
En particulier si nous avons $E = F$, en général on choisit $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ et $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'$ et on a : $A' = (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ ou $A = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} A' (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1}$.

Définition 2.6.4 (Matrices semblables) *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont semblables s'il existe une matrice inversible telle que : $A = PA'P^{-1}$.*

Remarque 2.6.1 *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.*

Exemple 2.6.3 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

Proposition 2.6.5 (Trace de matrices semblables) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors on a : $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$. Ainsi deux matrices semblables ont la même trace.*

Définition 2.6.5 (Trace d'un endomorphisme) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $tr(f)$ que l'on appelle trace de l'endomorphisme f, le scalaire $\mathrm{tr}\,(Mat_{\mathcal{U}}(f))$ qui est indépendant de la base $\mathcal{U}$.*

Exemple 2.6.4 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme Q défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$. Soit f l'application qui au polynôme P associe le polynôme Q, alors $tr(f) = n + 1$.*

Définition 2.6.6 (Déterminant d'un endomorphisme) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{U}$ une base de E. Le scalaire $\det(Mat_{\mathcal{U}}(f)) = \det_{\mathcal{U}}(f(\mathcal{U}))$ est appelé déterminant de f et on le note $\det(f)$. Il est indépendant de la base $\mathcal{U}$ choisie.*

2.7 Déterminants

Définition 2.7.1 (Déterminant d'une matrice) *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée. Le déterminant de* A*, noté* $\det(A)$*, le scalaire défini par* $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$.

On note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition 2.7.1 (Opérations) *Soit* $A = [C_1, \cdots, C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *(Multilinéarité)* $\det([C_1, \ldots, C_{i-1}, \lambda Y + \mu Y', C_{i+1}, \cdots, C_n]) =$
   $\lambda \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \cdots, C_n]) + \mu \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, Y', C_{i+1}, \cdots, C_n])$*)*.
2. *Soient* $i, j \in [\![1; n]\!]$ *tels que* $i \neq j$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors,*
   $\det([C_1, \ldots, C_n]) = \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n])$ *(un déterminant reste inchangé si à une certaine colonne on lui rajoute une* <u>*autre*</u> *colonne multipliée par un scalaire.*
   Plus généralement, on ne change pas un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
3. *(Antisymétrie) Soient* $i, j \in [\![1; n]\!]$ *tels que* $i \neq j$*, alors on a :*
   $\det([C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ...C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n]) = -\det([C_1, \ldots, C_n])$ *(on change le signe d'un déterminant en permutant deux colonnes).*
4. *(Forme n-alternée) Pour toute permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\det([C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(n)}]) = \varepsilon(\sigma)\det([C_1, \ldots, C_n])$.
5. *Pour les cinq premiers points, nous avons les mêmes opérations sur les lignes*
6. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
7. $\det(A^T) = \det(A)$.
8. *Soit* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
   En particulier on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \det(A^n) = (\det(A))^n$.

Proposition 2.7.2 (Déterminants et matrices inversibles)

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *La matrice* A *est inversible si et seulement si* $\det(A)$ *est non nul. Dans ce cas :* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. *On a* $\mathrm{rg}\,(A) < n \iff \det(A) = 0$.
3. *Si* A *est dans* $GL_n(\mathbb{K})$*, alors :* $\forall k \in \mathbb{Z},\ \det(A^k) = (\det(A))^k$.

Exemple 2.7.1 *Soit* n *un entier naturel impair. Soit* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$*, alors* A *n'est pas inversible.*

Proposition 2.7.3 (Déterminant d'une matrice triangulaire) *On a*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Pour calculer un déterminant, il est intérssant de faire des opérations élémentaires pour se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire (à l'aide de la méthode du pivot de Gauss par exemple).

Exemple 2.7.2 *Soient* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. *Mettre le déterminant suivant sous forme factorisée :* $\det(a_{\max(i,j)})$.

Proposition 2.7.4 (Déterminant par blocs) *Soient* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),$
$C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$. *Alors :* $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\det A)(\det C)$.

Proposition 2.7.5 (Développement selon une ligne ou une colonne)
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ *(on a retiré la i-ème ligne et la j-ème colonne).*
Alors :

1. *Pour tout* $j_0 \in [\![1;n]\!]$, *on a* $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0}(-1)^{i+j_0}\Delta_{i,j_0}$ *(développement par rapport à la* j_0*-ème colonne).*
2. *Pour tout* $i_0 \in [\![1;n]\!]$, *on a* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}(-1)^{i_0+j}\Delta_{i_0,j}$ *(développement par rapport à la* i_0*-ème ligne).*

Définition 2.7.2 (Cofacteurs et comatrice) *Le cofacteur d'indice i, j de A est* $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ *et on pose* $ComA = [(-1)^{i+j}\Delta_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$.

Exemple 2.7.3 *Soit* $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. *On pose* $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}$, *ce déterminant étant de taille* $n \times n$. *On a :* $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

Proposition 2.7.6 (Relation avec la comatrice et inversibilité) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors :*
$A(ComA)^T = (ComA)^T A = \det(A)I_n$.
En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(ComA)^T$.

Proposition 2.7.7 (Déterminant de Vandermonde) *Soient* $n \geq 2$ *et* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.
On considère le déterminant d'ordre n suivant : $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ *que l'on appelle déterminant de Vandermonde. On a :*

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1\leq j<i\leq n} (x_i - x_j).$$

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si les* $x_1, \ldots, x_n$ *sont deux à deux distincts.*

3 Polynômes de matrices ou d'endomorphismes

Définition 3.0.1 (Polynôme d'endomorphisme/matrices) *Pour tout polynôme* $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$,

- *on définit l'endomorphisme :* $P(u) \;=\; \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \quad$ *où* $u^0 = Id_E$.
- *on définit la matrice :* $P(A) \;=\; \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \quad$ *où* $A^0 = I_n$.

Proposition 3.0.1 (Composition) $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ (PQ)(u) \;=\; P(u) \circ Q(u)$.

Définition 3.0.2 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme) *Les polynômes P tels que $P(u) = 0$ (resp. $P(A) = 0$) sont appelés polynômes annulateurs de u (resp. de A).*

L'ensemble des polynômes annulateurs est donc le noyau du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ (resp. $P \mapsto P(A)$) allant $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ dans dans $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ (resp. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$).

Proposition 3.0.2 (Idéal annulateur de u/A) ***L****'ensemble des polynômes annulateurs de u (resp. A) forment un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, appelé idéal annulateur de u (resp. A).*
Ceci implique que : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0 \Rightarrow (PQ)(u) = 0$
(resp. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0 \Rightarrow (PQ)(A) = 0$*).*

Proposition 3.0.3 (Existence d'un polynôme minimal d'un endomorphisme/matrice) *On suppose E de dimension finie et u et A non nuls. Parmi les polynômes annulateurs de u (resp. A), il en existe un unique $\mu_u(X)$ (resp. $\mu_A(X)$) qui est celui de degré minimal et unitaire.*

Exemple 3.0.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice n. Alors $\mu_A = X^n$.*

Définition 3.0.3 (L'algèbre $\mathbb{K}\lceil u \rceil$, $\mathbb{K}\lceil A \rceil$) *On note :*

- $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- $\mathbb{K}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$

Proposition 3.0.4 (Base de $\mathbb{K}\lceil u \rceil$, $\mathbb{K}\lceil A \rceil$ en dimension finie) *Si d est le degré du polynôme minimal de u (resp. A), alors $(u^k)_{0 \le k \le d-1}$ (resp. $(A^k)_{0 \le k \le d-1}$) est une base de $\mathbb{K}[u]$ (resp. $\mathbb{K}[A]$).*
Ainsi $\dim \mathbb{K}[u] = d^\circ(\mu_u)$ *(resp.* $\dim \mathbb{K}[A] = d^\circ(\mu_A)$*).*

Proposition 3.0.5 (Lemme de décomposition des noyaux)

1. *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors :*
$$\operatorname{Ker} A(u) \oplus \operatorname{Ker} B(u) \;=\; \operatorname{Ker}(AB)(u).$$
2. *Soient $A_1, \ldots, A_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors :*
$$\operatorname{Ker}(A_1 \cdots A_p)(u) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} A_i(u).$$

Exemple 3.0.2 $u^3 + u^2 + u = 0$ *implique que* $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + u + Id_E)$.