1 Rappels de sup sur les fonctions usuelles

Définition 1.0.1 (Fonctions trigonométriques réciproque) 1. *La fonction* sin *réalise une bijection de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *dans* $[-1, 1]$ *et donc elle admet donc une fonction réciproque appelée* ***Arc sinus*** *définie de* $[-1; 1]$ *dans* $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

2. *La fonction* cos *réalise une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$ *et donc elle admet une fonction réciproque appelée* ***Arc cosinus*** *définie de* $[-1; 1]$ *dans* $[0; \pi]$.
3. *La fonction* tan *réalise une bijection de* $]-\pi/2, \pi/2[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et donc elle admet une fonction réciproque appelée* ***Arc tangente*** *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Proposition 1.0.1 (Limites de Arctan) *On a :* $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 1.0.2 (Dérivée de ces fonctions) *Les fonctions Arc sinus et Arc cosinus sont dérivables sur* $]-1; 1[$ *et pour tout* $y \in]-1; 1[$,

$$\operatorname{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad et \qquad \operatorname{Arccos}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Exemple 1.0.1 $\forall x \in [-1; 1],\ \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$.

Définition 1.0.2 (Cosinus, Sinus, Tangente hyperboliques) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique par*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Proposition 1.0.3 (Formule de trigonométrie hyperbolique) *On a :* $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

Proposition 1.0.4 (Dérivation de ch, sh et th) *Les dérivées des fonctions hyperboliques sont données par*

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch},\ \operatorname{ch}' = \operatorname{sh},\ \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

Proposition 1.0.5 (Limites de ch, sh et th en $\pm\infty$) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.

2 Rappels de sup sur les théorèmes de continuité

Théorème 2.0.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout a, b appartenant à I, avec $a < b$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $y = f(c)$.*

Corollaire 2.0.1 (Image d'un intervalle) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Exemple 2.0.1 *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.*

Théorème 2.0.2 (Théorème de la bijection) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I)$ et elle est strictement monotone. Soit $J = f(I)$ qui est donc un intervalle. Alors :*

1. *f est une bijection de I sur J.*
2. *$f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue sur J et de même monotonie.*

Proposition 2.0.1 (Fonctions Injectives et monotonie) *Toute fonction injective sur un intervalle est strictement monotone.*

3 Rappels de sup sur les théorèmes de dérivation

Proposition 3.0.1 (Dérivation de la réciproque) *On suppose f continue et strictement monotone et on note $J = f(I)$ (qui est un intervalle). Ainsi f réalise une bijection de I dans J.*

1. *Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} existe et est définie sur l'intervalle $J = f(I)$ et f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.*

Exemple 3.0.1 *Les dérivées de* Arcsin, Arccos *et* Arctan.

Théorème 3.0.1 (Théorème de Rolle) *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.*

Exemple 3.0.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ s'annulant en $k+1$ points $a_0 < a_1 < ... < a_k$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(c) = 0$.*

Théorème 3.0.2 (Égalité des accroissements finis (EAF)) *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Théorème 3.0.3 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe des réels m et M tels que sur $]a,b[$, on ait : $m \leq f' \leq M$. Alors on a :*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Corollaire 3.0.1 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) *Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{F}([I,\mathbb{R})$ dérivable sur I. On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k$. Alors f est k-lipschitzienne : $\forall x,y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.*

Exemple 3.0.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$ *ou étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f K-lipschitzienne pour $K \in [0,1[$.*

Théorème 3.0.4 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que : $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Exemple 3.0.4 *On montrer par récurrence que $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

4 Fonctions convexes

Définition 4.0.1 (Fonctions convexes et concaves) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est convexe lorsque :*
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2)\ \leq\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$
2. *Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est concave, autrement dit :*
$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2)\ \geq\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$

Proposition 4.0.1 (Arc sous la corde) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient M_1 et M_2 sur $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f. Tous les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés sous la corde $[M_1M_2]$.*
Si f est concave, alors les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés au dessus la corde $[M_1M_2]$.

Proposition 4.0.2 (Caractérisation de la convexité et concavité par le taux d'accroissement)

- *Une fonction f est convexe sur I si et seulement si les taux d'accroissements sont croissants :*
$$\forall (x,y,z) \in I^3, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
- *La fonction f est concave sur I si et seulement si :*
$$\forall (x,y,z) \in I^3, \quad x < y < z \implies \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \geq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Proposition 4.0.3 (Inégalité de Jansen) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $x_1, ..., x_n \in I$. Alors :*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Exemple 4.0.1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :* $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \dfrac{x_1 + ...x_n}{n}.$

Proposition 4.0.4 (Cararactérisation de la convexité et concavité par la croissance de la dérivée) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors :*

- *f est convexe si et seulement si f' est croissante.*
- *f est concave si et seulement si f' est décroissante.*

Exemple 4.0.2 exp *est convexe,* ln *est concave.*

Proposition 4.0.5 (Caractérisation de la convexité et concavité par la position courbe/tangente) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors :*

- *f est convexe sur I si et seulement si son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :*
$$\forall a \in \mathring{I}, \forall x \in I, \quad f(x)\ \geq\ f(a) + (x-a)f'(a).$$
- *f est concave sur I si et seulement si son graphe est situé en-dessous de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :*
$$\forall a \in \mathring{I}, \forall x \in I, \quad f(x)\ \leq\ f(a) + (x-a)f'(a).$$

Exemple 4.0.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1,\ \ \forall x \in [0, \pi/2],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$

Proposition 4.0.6 (Caractérisation de la convexité et concavité par la positivité de la dérivée seconde) *Soit*
$f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

1. *La fonction f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.*
2. *La fonction f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.*