**Correction des exercices du 09/10/2023 (Algèbre linéaire)**

**Ex 1** : Soit $A=\begin{pmatrix}8&-3&-6\\-2&3&2\\6&-3&-4\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ et en déduire le polynôme minimal de $A$.
2. Montrer que $A$ est inversible.
3. Calculer $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

*Correction :*

1. Après calcul, on trouve : $A^2=\begin{pmatrix}34&-15&-30\\-10&9&10\\30&-15&-26\end{pmatrix}$.
   Ainsi on a : $A^2=5A-6I_3$, donc $P=X^2-5X+6$ annule $A$.
   Or $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$. Comme : $\mu_A|P$, alors $\mu_A=X-2$ ou $\mu_A=X-3$ ou $\mu_A=X^2-5X+6$.
   Si $\mu_A=X-2$, alors $0=\mu_A(A)=A-2I_3$, soit $A=2I_3$, ce qui est faux. De même, on n'a pas $\mu_A=X-3$. Ainsi $\mu_A=X^2-5X+6$.
2. On a $A^2=5A-6I_3$, puis $A^2-5A=-6I_3$, donc $A\left(\dfrac{5}{6}I_3-\dfrac{1}{6}A\right)=I_3$, donc $A$ est inversible, avec $A^{-1}=\dfrac{5}{6}I_3-\dfrac{1}{6}A$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   Effecutons la division euclidienne de $X^n$ par $\mu_A=X^2-5X+6$.
   Elle s'écrit : $X^n=(X^2-5X+6)Q+aX+b$, avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $a,b$ dans $\mathbb{R}$, car $d^\circ(\mu_A)=2$. En remplaçant successivement $X$ par 2 et 3, on tombe sur : $2^n=2a+b$ et $3^n=3a+b$. On a donc $a=3^n-2^n$, puis $b=3.2^n-2.3^n$.
   On a donc : $X^n=\mu_AQ+(3^n-2^n)X+3.2^n-2.3^n$.
   En remplaçant $X$ par $A$, on a :
   $A^n=\underbrace{\mu_A(A)}_{=0}.Q(A)+(3^n-2^n)A+(3.2^n-2.3^n)I_3=(3^n-2^n)A+(3.2^n-2.3^n)I_3.$

---

**Ex 2** : Calculer $\begin{vmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&a_2\\(a_1)&&&a_1\end{vmatrix}$.

*Correction :* On effectue d'abord $L_n\leftarrow L_n-L_{n-1}$, ce qui donne :

$D=\begin{vmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&a_2\\(a_1)&&&a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&\cdots&&a_n\\&\ddots&\ddots&&\vdots\\a_1&\cdots&a_1&a_2&a_2\\a_1&\cdots&a_1&a_1&a_2\\0&\cdots&&0&a_1-a_2\end{vmatrix}$. En effectuant $L_{n-1}\leftarrow L_{n-1}-L_{n-2}$, on a :

$D=\begin{vmatrix}a_1&a_2&\cdots&&a_n\\&\ddots&\ddots&&\vdots\\a_1&\cdots&a_1&a_2&a_3\\0&\cdots&0&a_1-a_2&a_2-a_3\\0&\cdots&&0&a_1-a_2\end{vmatrix}$.

En effectuant succesivement $L_{n-2}\leftarrow L_{n-2}-L_{n-3}$, $L_{n-3}\leftarrow L_{n-3}-L_{n-4}$,...,$L_2\leftarrow L_2-L_1$, on tombe sur $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & & a_n \\ & a_1-a_2 & & (*) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & a_1-a_2 & \\ & & & & a_1-a_2 \end{vmatrix}$, qui est une matrice triangulaire suppérieure, donc :

$D = a_1(a_1-a_2)^{n-1}$.

Fin de la correction des exercices de TD

---

**<u>Ex 3</u>** : Soit $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(u_n)$. On pose $v_n = 2^n u_n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers 0 et que la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que la série $\sum \left(\dfrac{1}{v_{n+1}^2} - \dfrac{1}{v_n^2}\right)$ converge.
3. En déduire qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+^*$ (que l'on ne calculera pas) tel que $u_n \sim \dfrac{l}{2^n}$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)$.

*Correction de la dernière question :*
On a trouvé que $\dfrac{1}{v_{n+1}^2} - \dfrac{1}{v_n^2} \sim \dfrac{2}{3.4^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$.
Comme $\sum \dfrac{2}{3.4^n}$ est une série à termes positifs convergente, alors par sommation des relations de comparaison, avec les restes, on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{2}{3.4^k}$. Or on a par téléscopage :
$\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{v_N^2} - \frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{v_n^2}$. Par ailleurs, on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{2}{3.4^k} = \frac{2}{3.4^n}\times\frac{1}{1-1/4} = \frac{8}{9.4^n}$.
Ainsi on a : $\dfrac{1}{\ell^2} - \dfrac{1}{v_n^2} \sim \dfrac{8}{9.4^n}$, soit $\dfrac{1}{\ell^2} - \dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{8}{9.4^n} + o\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$, puis $\dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{\ell^2} - \dfrac{8}{9.4^n} + o\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$,
donc $v_n = \left(\dfrac{1}{\ell^2} - \dfrac{8}{9.4^n} + o\left(\dfrac{1}{4^n}\right)\right)^{-1/2} = \ell\left(1 - \dfrac{8\ell^2}{9.4^n} + o\left(\dfrac{1}{4^n}\right)\right)^{-1/2} = \ell\left(1 + \dfrac{4\ell^2}{9.4^n} + o\left(\dfrac{1}{4^n}\right)\right)$, puis
$u_n = \dfrac{v_n}{2^n} = \dfrac{\ell}{2^n} + \dfrac{4\ell^3}{9.8^n} + o\left(\dfrac{1}{8^n}\right)$.

---

**<u>Ex 4</u>** : Donner un équivalent de $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

*Correction :* La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante, positive et continue sur $[2,+\infty[$. Par comparaison séries et intégrales, on a : $\displaystyle\int_2^{n+1}\frac{dt}{t\ln(t)} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} = \frac{1}{2\ln(2)} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} \leq \frac{1}{2\ln(2)} + \int_2^n\frac{dt}{t\ln(t)}$.
Une primitive de $t\mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ étant $t\mapsto \ln|\ln(t)|$ (on a une fonction du type $\dfrac{u'}{u}$, avec $u = \ln$), alors on a :
$\displaystyle\ln((\ln(n+1)) - \ln|\ln(2)| \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} \leq \frac{1}{2\ln(2)} + \ln((\ln(n)) - \ln|\ln(2)|$.

Or nous avons $\ln((\ln(n+1)) = \ln(\ln(n) + \ln(1+1/n)) = \ln\left(\ln(n)\left[1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right]\right) =$
$\ln(\ln(n)) + \ln\left[1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right] \sim \ln(\ln(n))$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left[1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right] = 0$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

---

**<u>Ex 5</u>** : Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(V)$ tels que les seuls sous-espace vectoriels stables à la fois par $a$ et par $b$ soient $\{0\}$ et $V$. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul qui commute avec $a$ et $b$. Montrer que $u$ est bijectif.

*Correction :* Comme $u$ commute avec $a$ et $b$, alors $a$ et $b$ laissent stable $\mathrm{Ker}\,(u)$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$ ou $\mathrm{Ker}\,(u) = E$. Comme $u$ est non nul, on ne peut pas avoir $\mathrm{Ker}\,(u) = E$. On a donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$, ainsi $u$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, donc $u$ est bijective.