Ex 1 : Étudier la dérivabilité de $h : x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{Arcsin}\,(x^2)$.

Correction : Nous allons utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

- h est continue sur $[-1,1]$ par opérations et compositions.
- h est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par opérations et compositions.
- On a : $\forall x \in]-1,1[,\ h'(x) = 2x\,\mathrm{Arcsin}\,(x^2) + (x^2-1)\times\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}} =$ $2x\,\mathrm{Arcsin}\,(x^2)+(x-1)(x+1)\times\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} = 2x\,\mathrm{Arcsin}\,(x^2)-(1-x)(x+1)\times\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} =$ $2x\,\mathrm{Arcsin}\,(x^2) - 2x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} h'(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}\,(1) = \pi$.

  Par imparité de h', on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} h'(x) = -\pi$.

Grâce au théorème de la limite de la dérivée, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et $h'(1)=\pi$ et $h'(-1)=-\pi$.

Autre méthode : on peut montrer par exemple que h est dérivable en 1 en passant par le taux d'accroissement : $\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = (x+1)\,\mathrm{Arcsin}\,(x^2) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 2\,\mathrm{Arcsin}\,(1) = \pi$.

Ex 2 : Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + (2-\cos(t^2))y = 0$. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f est convexe.

2. Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
En déduire une contradiction puis conclure.

Correction :

1. On a : $\forall t\in\mathbb{R},\ f''(t) = -(2-\cos(t^2))f(t)\geq 0$, car f est supposée à valeurs négatives.
Ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation de la tangente en a est : $y = f(a)+(x-a)f'(a)$.

Comme f est convexe, sa courbe représentative est au dessus des tangentes en chacun de ses points.
On a donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq f(a)+(x-a)f'(a)$.
On suppose que $f'(a)>0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(a)+(x-a)f'(a)] = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est impossible, vu que f est à valeurs strictement négatives.

On suppose que $f'(a)<0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}[f(a)+(x-a)f'(a)] = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est impossible, vu que f est à valeurs strictement négatives.

On a donc : $\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=0$. Ainsi f est constante. Soit c cette constante.
En injectant dans l'équation différentielle, on a : $\forall t\in\mathbb{R},\ (2-\cos(t^2))c = 0$. Comme $2-\cos(t^2)$ est strictement positif, alors $c=0$, ce qui est impossible.
Une telle fonction f n'existe pas.

Ex 3 : Soient $n \geq 3$ et $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $a_{i,1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $a_{n,i} = 1$ pour $2 \leq i \leq n$, les autres coefficients étant nuls.

1. Montrer que l'image et le noyau de A sont supplémentaires.

2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B à préciser.

3. Déterminer les $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $X^2 = A$.

Correction : Nous allons répondre à la dernière question. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle qu'il existe une base $\mathcal{B} = (C_1, ..., C_{n-2}, E, F)$ telle que si on note $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, alors $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$. De plus $(C_1, ..., C_{n-2})$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$ et (E, F) une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Soit X une solution. Alors $XA = AX$, donc X laisse $\mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$ stable, donc dans la base $\mathcal{B} = (C_1, ..., C_{n-2}, E, F)$, l'application canoniquement associée à X a pour matrice $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ et donc $X = P\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}P^{-1}$. On a donc $X^2 = P\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^2 P^{-1} = A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}P^{-1}$, puis comme P est inversible, alors : $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} U^2 & 0 \\ 0 & V^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, soit $U^2 = 0$ et $V^2 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ainsi $V^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{cases} a^2+bc &= 1 \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= n-2 \\ bc+d^2 &= 1 \end{cases}$. Comme $n \geq 3$, alors $c(a+d)$ n'est pas nul, donc la deuxième ligne donne $b = 0$. On a donc : $\begin{cases} a^2 &= 1 \\ b &= 0 \\ c(a+d) &= n-2 \\ d^2 &= 1 \end{cases}$. On a a et c dans $\{-1, 1\}$. Mais $a + c \neq 0$, donc $(a, c) = (1, 1)$ ou $(a, c) = (-1, -1)$. Dans le premier cas, on trouve $c = \dfrac{n-2}{2}$ et dans le deuxième cas : $c = -\dfrac{n-2}{2}$.

Ainsi $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-2}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ou $V = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-2}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, on vérifie que si $X = P\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $U^2 = 0$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-2}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ou $V = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-2}{2} & 1 \end{pmatrix}$, alors on a le résultat.

Ex 4 : Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$ et $f^8 + 16f^4 = 0$. Déterminer le polynôme minimal de f, puis en déduire f.

Correction : Soit μ_f le polynôeme minimal de f. Comme $X^3 - 3X^2 + 2X$ et $X^8 + 16X^4$ annulent f, alors μ_f divise ces deux polynômes et donc il divise $(X^3 - 3X^2 + 2X) \wedge (X^8 + 16X^4)$. Or $X^3 - 3X^2 + 2X =$

$X(X^2-3X+2) = X(X-1)(X-2)$ et $X^8+16X^4 = X^4(X^4+16)$. Comme $(X-1)(X-2)$ est X^4+16 sont premiers entre eux, car 1 et 2 ne sont pas racines de X^4+16, alors $(X^3-3X^2+2X)\wedge(X^8+16X^4) = X$. Donc μ_f divise X, puis comme μ_f est de degré au moins un, alors $\mu_f = X$.
Ainsi $0 = \mu_f(f) = f$.

<u>Ex 5</u> : Soient f, g, h trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose $f \circ g - g \circ f = h$ et $\text{rg}\,(h) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E telle que $\text{Ker}\,(h) = \text{Vect}\big((e_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}\big)$.
2. Quelle est la trace de h ?
3. Montrer que h est nilpotente.

Correction :

1. Grâce au théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}\,(h)) = n-1$, puis on se donne une base $\mathcal{B} = \big((e_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}\big)$ de $\text{Ker}\,(h)$. Cette famille est libre, donc on peut la compléter en une base $\big((e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\big)$ de E.
2. $tr(h) = tr(f\circ g) - tr(g \circ f) = tr(f\circ g) - tr(f\circ g) = 0$.
3. Dans la base $\mathcal{B}$, on a : $M = Mat_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$, car : $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ h(e_i) = 0$ et on décompose $h(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ (sur lequel on n'a aucune contrainte) : $h(e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme $tr(h) = 0$, alors $x_n = 0$, puis $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve donc que $M^2 = 0$, puis $h^2 = 0$.