Définition 0.0.1 (Séries entières) *Soit (a_n) une suite complexe. La série entière de coefficients a_n est la série $\sum a_n z^n$, avec z un paramètre réel ou complexe.*

Remarque 0.0.1

1. *Il y aura deux façons de voir une série entière.*
   Soit on regarde cela comme une série et on cherche z telle que celle-ci soit convergente. Nous verrons cela dans le premier paragraphe.
   Soit nous regarderons ceci comme la série de fonctions $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
2. *On rappelle que : $0^0 = 1$ et que : $0^n = 0$ si n est dans $\mathbb{N}^*$.*
   Si on note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $f(0) =$

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A n'est pas majoré, on notera $\sup(A) = +\infty$.

1 Rayon de convergence d'une série entière

1.1 Rayon de convergence et premières propriétés

Proposition 1.1.1 (Lemme d'Abel) *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration :

Remarque 1.1.1

1. *On prendra garde qu'il faut que $|z| < |z_0|$ soit une inégalité stricte.*
2. *Si on note $I = \{r \in \mathbb{R}_+,\ \text{la suite } (a_n r^n) \text{ soit bornée}\}$, alors I est un intervalle de $\mathbb{R}_+$. En effet soient α, β dans I tels que $\alpha < \beta$. Pour tout r de $[\alpha, \beta]$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée, car on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| \leq |a_n \beta^n|$ et cette dernière quantité est bornée, car β est dans I. Donc r est dans I, puis nous avons : $[\alpha, \beta] \subset I$. Comme 0 est dans I, alors I est de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$.*

Définition 1.1.1 (Rayon de convergence) ***(Énoncé CCP 20 et 21)*** *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ la borne supérieure (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) de l'ensemble*
$\{r \in \mathbb{R}_+,\ \text{la suite } (a_n r^n) \text{ soit bornée}\}$.
Autrement dit, le rayon de convergence vaut $+\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré, sinon c'est un réel positif ou nul.

Proposition 1.1.2 (Rayon de convergence et caractère borné de $(a_n z^n)_n$) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

1. - *Si $|z| < R$, alors la suite $(a_n z^n)$ est bornée.*
   - *Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.*
2. - *Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors*
   - *Si la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, alors*

Démonstration : Pour les deux premiers points, on a :
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$. Ainsi grâce à la remarque précédente, on a :
$\sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$ vaut $[0, R[$ ou $[0, R]$.
Les deux derniers points sont les contraposées des deux premiers points.

Remarque 1.1.2

1. ***(CCP 21 et 20c))*** *IMPORTANTE si (a_n) est une suite bornée, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ vérifie :*

2. *(IMPORTANT) Soit $p \in \mathbb{N}$. Multiplier (ou diviser lorsque cela est possible) une série entière par z^p ne change par le rayon de convergence : $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^{n+p}$ ont le même rayon de convergence, car pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, les suites $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n z^{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$, sont bornées en même temps, car on passe de l'une à l'autre en multipliant par la constante non nulle z^p.*
Ainsi les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+p} z^n$ ont aussi le même rayon de convergence.

3. *Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, car : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z^n| = ||a_n| z^n| = |(-1)^n a_n z^n|$ et donc les suites $(a_n z^n)$, $(|a_n| z^n)$ et $((-1)^n a_n z^n)$ sont bornées en même temps.*

4. *Si a_n est nulle à partir d'un certain rang, que dire de la série entière $\sum a_n z^n$ et de son rayon de convergence ?*

5. *ATTENTION : on ne peut rien dire sur la caractère borné de $(a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$, car I est de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$.*

Exemple 1.1.1 *Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :*

1. $\sum_{n\geq 0} z^n$.

2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence R' de $\sum a_n z^{2n}$?*

Proposition 1.1.3 (Série géométrique) *Soit $z \in \mathbb{C}$. Si on a : $|z| < 1$, alors on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.*

Démonstration : Voir le cours sur les séries géométriques.

Exemple 1.1.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$.*

1. *Montrer que la famille $(z^{2p+3q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme $S(z)$.*

2. *Montrer que $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n$, avec d_n le nombre de façon d'écrire $n = 2p + 3q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.*

Proposition 1.1.4 (Convergence de la série $\sum a_n z^n$) *$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et R son rayon de convergence.*

1. - *Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$*
   - *Pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$*
2. - *Si la série $\sum a_n z^n$ converge, alors*
   - *Si la série $\sum a_n z^n$ diverge, alors*

Démonstration :

Remarque 1.1.3
1. *Attention dans la preuve précédente, on ne peut pas dire directement que si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge, car on ne sait pas si la suite $(a_n R^n)$ est bornée pour pouvoir utiliser le lemme d'Abel.*
2. *Là encore les inégalités sont strictes dans les hypothèses de* 1..

Corollaire 1.1.1 (Rayon de convergence défini par la convergence de $\sum a_n z^n$) ***(Énoncé CCP 20 et 21)*** *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ peut s'écrire aussi :*
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ *la série* $\sum a_n r^n$ *soit convergente (absolument)*$\}$.

Exemple 1.1.3
1. *Nous avons vu dans le cours sur les séries que $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout z de $\mathbb{C}$ (à l'aide de la règle de D'Alembert) ainsi le rayon de convergence de cette série vaut :*
2. ***(CCP 20c) et 21)***
   (a) *Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?*
   (b) *Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ et $\sum \cos(n) z^n$?*

Définition 1.1.2 (Exponentielle) *Pour z dans $\mathbb{C}$, définit l'exponentielle de z par :* $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Son rayon de convergence vaut $+\infty$, car la série converge pour tout z de $\mathbb{C}$ (voir le cours sur les séries)*

Remarque 1.1.4

1. *Ceci peut servir de définition pour e^z avec z dans $\mathbb{C}$. Nous verrons plus tard que cette définition coïncide bien avec la définition connue de l'exponentielle réelle ou complexe.*
2. *Nous avons montré dans le chapitre sur les séries à l'aide d'un produit de Cauchy que :* $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Exemple 1.1.4 *Déterminer* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Définition 1.1.3 (Disque/ intervalle ouvert de convergence)

1. *On appelle disque ouvert de convergence de la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *le disque ouvert* $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$, *où R est son rayon de convergence.*
   Si $R = 0$, le disque ouvert est $\emptyset$, si $R = +\infty$, c'est $\mathbb{C}$ tout entier.

2. On appelle intervalle (ouvert) de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ l'intervalle $]-R,R[$, où R est son rayon de convergence.
Si $R=0$, cet intervalle est vide, si $R=+\infty$, c'est $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque 1.1.5 *Attention, sur le cercle $\{z\in\mathbb{C},\ |z|=R\}$, on ne peut rien dire sur la convergence de la série entière.*
Par exemple, montrer que les trois séries entières suivantes ont pour rayon de convergence 1, mais sur le cercle $\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$, on ne peut rien dire sur la convergence des séries : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$, on a des comportements différents.

Définition 1.1.4 (Fonctions développables en série entière (DSE)) *Soit $f: A\to\mathbb{C}$, avec A une partie de $\mathbb{C}$.*
Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r,r[$ (avec $]-r,r[$ inclus dans A) ou sur $D(0,r)$ (avec $D(0,r)$ inclus dans A), s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R supérieur ou égal à r telle que respectivement :

$$\forall x\in]-r,r[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad ou \quad \forall z\in D(0,r),\ f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Dire que f est DSE au voisinage de 0 signifie qu'il existe $r>0$ tel que f soit DSE sur $]-r,r[$ ou $D(0,r)$.

Exemple 1.1.5

1. *Montrer que $x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est décomposable en série entière au voisinage de 0.*

2. *IMPORTANT. Soit f décomposable en série entière sur $]-R,R|$, avec :*
$\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *où $a_0=a_1=...=a_{p-1}=0$, montrer que $g: x\mapsto \frac{f(x)}{x^p}$ se prolonge en une fonction décomposable en série entière sur $]-R,R[$.*

Montrer que $h: x\mapsto \frac{e^x-1}{x}$ se prolonge en une fonction décomposable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.6 *Le premier exemple montre qu'une fonction peut être décomposable en série entière sans l'être forcément sur tout son intervalle de définition.*

1.2 Opérations sur les séries entières et rayon de convergence

1.2.1 Somme de deux séries entières

Proposition 1.2.1 (Somme de deux séries entières) ***(Démo CCP 22)*** *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence* R_a *et* R_b*. Alors la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* R *tel que* . *Lorsque* $R_a \neq R_b$, *alors* $R =$.
Si on a z *dans* $\mathbb{C}$ *avec* $|z| < \min(R_a, R_b)$, *alors :* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

Démonstration :

Exemple 1.2.1

1. *On suppose que la définition que l'on a donnée pour la formule de l'exponentielle coïncide avec l'exponentielle connue. En déduire que les fonctions* $\cos, \sin, \mathrm{ch}$ *et* sh *sont décomposables en séries entières et on déterminera le rayon de convergence de celles-ci.*

2. *Donner le rayon de convergence* R *et la somme de* $\sum \mathrm{ch}\,(n) z^n$.

Corollaire 1.2.1 (Somme de deux fonctions DSE) *Si f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, alors $f+g$ l'est aussi.*

1.2.2 Produit de Cauchy

Proposition 1.2.2 (Produit de Cauchy) *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors la série entière produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, avec :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *a un rayon de convergence R tel que :*

De plus : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n =$

Démonstration : Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ convergent absolument, donc la série produit de Cauchy $\sum d_n$ aussi avec $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ converge absolument et : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Exemple 1.2.2 *Soit $(D_n)_n$ une suite vérifiant : $D_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$. On admet que D_n est positif (cela sera prouvé dans le premier cours de probabilité)*

On note $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n$.

1. *Montrer que le rayon de convergence de S vaut au moins 1.*
2. *Montrer que pour z dans $\mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a :* $S(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.

Corollaire 1.2.2 (Produit de deux fonctions DSE) *Si f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, alors fg l'est aussi.*

1.2.3 Composition de série entière (hors programme)

Il n'y a pas de théorèmes au programme sur la composition de séries entières. On peut vous demander de traiter des cas particuliers cependant. En général pour s'en sortir, il faut utiliser des familles sommables avec deux indices. Voici un exemple :

Exemple 1.2.3 *Montrer que $f : x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

1.2.4 La série entière $\sum na_n z^n$

Proposition 1.2.3 (La série entière $\sum na_n z^n$) *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum na_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Démonstration : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R' celui de $\sum na_n z^n$. Soit r dans $\mathbb{R}_+$ tel que $r < R'$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n r^n| = |a_n| r^n \leq n|a_n|r^n = |na_n r^n|$. Comme la suite $(na_n r^n)_n$ est bornée, alors la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Ainsi on a : $r \leq R$. Ceci étant valable pour tout r tel que $r < R'$, alors en faisant tendre r vers R', on a : $R' \leq R$.
Soit r dans $\mathbb{R}_+$ tel que $r < R$. Soit $r' = \dfrac{r+R}{2}$. On a alors $0 \leq r < r' < R$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $|na_n r^n| = \left|a_n r'^n n\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n\right|$. Nous avons : $n\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n = ne^{n\ln\left(\frac{r}{r'}\right)}$. Or comme : $\dfrac{r}{r'} < 1$, alors : $\ln\left(\dfrac{r}{r'}\right) < 0$ et par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{n\ln\left(\frac{r}{r'}\right)} = 0$ et donc : $na_n r^n = o(a_n r'^n)$. Par comparaison comme la série $\sum a_n r'^n$ converge absolument, alors $\sum na_n r^n$ converge aussi absolument et donc : $r < R'$. En faisant tendre r vers R, on a alors : $R \leq R'$. Ainsi on obtient $R = R'$.

Remarque 1.2.1

1. *Ainsi $\sum a_n z^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n} z^n$ ont aussi le même rayon de convergence, car $n\dfrac{a_n}{n} z^n = a_n z^n$.*
2. *Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on prouve par récurrence sur p que $\sum n^p a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Exemple 1.2.4 ***(CCP 20)*** *Quel est le rayon de convergence R de la série $\sum n^{(-1)^n} z^n$?*

1.3 Comment déterminer un rayon de convergence ?

Voici les méthodes par ordre d'importance.

1.3.1 Règle de D'Alembert

En considérant la proposition 1.1.4, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour voir quand la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Ceci est assez pratique lorsque dans a_n il y a des produits ou des puissances, qui se simplifient par quotient $\dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}$. Ensuite il faut trouver z tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} > 1$.

Proposition 1.3.1 (Rayon de CV de $\sum n^\alpha z^n$) *Le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est*

Démonstration :

Exemple 1.3.1 1. ***(CCP 20)*** *Donner le rayon de convergence de : $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} z^{2n+1}$.*

2. *Donner le rayon de convergence de : $\sum n^n z^n$.*

3. ***(CCP 23)*** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ. Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence R.*

Remarque 1.3.1 *La règle de D'Alembert est très pratique lorsque vous n'avez pas des z^n, mais d'autres puissances entières sur z, comme le premier exemple de* **??** *où nous avions du z^{2n+1}.*

1.3.2 Comparaison avec des séries entières plus simples

Donnons une proposition qui permet de comparer le terme général d'une série entière avec le terme général d'une série entière plus simple.

Proposition 1.3.2 (Comparaison de séries entières) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques, soit* R_a *et* R_b *les rayons de convergence de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *respectivement.*

Si $a_n = O_{+\infty}(b_n)$, *alors*
Si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ *alors*

Démonstration : On suppose que $a_n = O_{+\infty}(b_n)$.

Si : $a_n \sim b_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, alors les suites (a_n/b_n) et (b_n/a_n) sont bornées (car elles convergent) et on a : $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et ainsi grâce au premier point $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$.

Remarque 1.3.2

1. *Si* $a_n = o_{+\infty}(b_n)$, *alors*
2. *On voit que dans* $\sum a_n z^n$, *plus* a_n *est petit, plus le rayon de convergence peut être grand.*

Exemple 1.3.2 *Quel est le rayon de convergence de :*

1. $\sum P(n) z^n$ *avec* $P = \sum\limits_{k=0}^{q} a_k X^k$ *un polynôme de degré* q.

2. $\sum a_n z^n$, *avec* $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. $\sum a_n z^n$, *avec* $a_n = \operatorname{Arctan}(n^\alpha)$, *avec* α *dans* $\mathbb{R}$.

4. $\sum a_n z^n$, *avec* $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+t} dt$.

1.3.3 Utilisation d'inégalités grâce à la définition et aux propriétés de base

Utiliser les propositions 1.1.2, 1.1.4 et 1.3.2 afin d'obtenir deux inégalités pour les rayons de convergenece. Nous avons déjà vu dans les exemples 1.1.3 et 1.2.4 l'exploitation de ces idées.

Exemple 1.3.3 *Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$, avec a_n la n-ème décimale de $\sqrt{2}$.*

2 Régularité de la somme

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R\}$ (appelé disque fermé).

2.1 Convergence normale

Proposition 2.1.1 (Convergence normale) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $\rho \in [0, R[$. La série de fonctions $z \mapsto \sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, \rho)$.*

Démonstration :

Remarque 2.1.1

1. *Pour tout $(a, b) \in]-R, R[^2$ tels que $a < b$, la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[a, b]$. On a donc la convergence uniforme sur $[a, b]$.*
2. *ATTENTION, ceci n'est valable que sur tout disque fermé inclus dans le disque <u>ouvert</u> $D(0, R)$ ou tout segment $[a, b]$ inclus dans l'intervalle <u>ouvert</u> $]-R, R[$.*
   Trouver un exemple de série entière qui n'est pas normalement convergente sur $]-R, R[$, avec $R \in \mathbb{R}_+^*$ son rayon de convergence.

Exemple 2.1.1

1. ***(CCP 15)*** *Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur $\overline{D}(0, \rho)$?*

2. *On considère une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$. *Pour* z *dans* $\mathbb{C}$, *avec* $|z| < R$, *on pose* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   (a) *Soit* r *tel que :* $0 < r < R$. *Montrer que :* $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}d\theta$.

   (b) *On suppose que* f *est bornée sur* $\mathbb{C}$ *et* $R = +\infty$. *Montrer que* f *est constante.*

2.2 Continuité

Proposition 2.2.1 (Continuité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière et* R *le rayon de convergence de la série entière. Alors :*

1. $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur* $D(0, R)$.
2. $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $]-R, R[$.

Démonstration : Montrons le premier point.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n : z \mapsto a_n z^n$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. On pose $r = \dfrac{R + |z_0|}{2}$. On a : $|z_0| < r < R$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est continue sur $D(0, r)$. Comme $r < R$, on a la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\overline{D}(0, r)$, donc sur $D(0, r)$. Ainsi $\sum u_n$ est continue sur $D(0, r)$, donc sur un voisinage de z_0. Cela étant vrai pour tout z_0 de $D(0, R)$, on a la continuité sur $D(0, R)$.

Remarque 2.2.1 1. *Si* $\sum a_n R^n$ *converge absolument, alors*

2. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Si* $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0$, *alors* $g : x \mapsto \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{x^p}$ *qui est continue sur* $]-R, R[\backslash\{0\}$ *se prolonge en une fonction continue sur* $]-R, R[$ *en posant* $g(0) =$

3. *Soit* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une fonction décomposable en série entière sur* $]-R, R[$. *Le développement limité de* f *à l'ordre* p *au voisinage de* 0 *est donné par :*

Le DSE d'une fonction f *sur* $]-R, R[$ *s'apparente à un DL « d'ordre infini » en* 0 *(les coefficients sont les mêmes par unicité du DL) mais il y a une différence notable : un DL en* 0 *n'a qu'un caractère local (approximation de* f *quand* x *tend vers* 0*), alors que le DSE possède un caractère global (il donne une représentation exacte de* f *sur tout* $]-R, R[$*).*

Proposition 2.2.2 (Identification des coefficients) *Soient* $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $T(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *deux séries entières. Soit* r *inférieur aux rayons de convergence de* S *et* T *et tel que :*
$\forall x \in]0, r[, S(x) = T(x)$. *Alors :*

Démonstration : Soit $p \in \mathbb{N}$. Grâce à la remarque précédente, sur un voisinage de 0 par valeurs supérieures, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n x^n + o(x^p) = \sum_{n=0}^{p} b_n x^n + o(x^p)$. Par unicité du développement limité, on a : $a_p = b_p$.

Corollaire 2.2.1 (Unicité du DSE) *Toute fonction décomposable en série entière admet une unique décomposition.*

Exemple 2.2.1 *Soit* (D_n) *une suite telle que* $D_0 = 1$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$. *Déterminer la suite* (D_n).

Remarque 2.2.2 *IMPORTANTE : Le DSE d'une fonction paire (resp. impaire) est constitué de puissances paires (resp. impaires). En effet si* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sur* $]-R, R[$, *alors si* f *est paire (resp. impaire), alors :* $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = f(-x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k x^k$ *(resp.*$f(x) = -f(-x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k x^k$*) et donc par unicité du DSE, on a :* $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = (-1)^k a_k$ *(resp.*$a_k = (-1)^{k+1} a_k$*) et donc* $a_k = 0$ *si* k *est pair (resp. impair).*

Nous pouvons étudier le prolongement par continuité d'une série entière au bord de l'intervalle de convergence, grâce au théorème suivant.

Théorème 2.2.1 (Théorème d'Abel radial) *Si* $\sum a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* R *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et si* $\sum a_n R^n$ *converge, alors*

Démonstration : (HORS PROGRAMME) En posant $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quitte à considérer $x \mapsto f(Rx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n x^n$ au lieu de f, on peut supposer que $R = 1$.

On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, qui existe en tant que reste d'une série convergente.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |R_n| \leq \varepsilon$.
Soit $x \in [0,1[$. On a : $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k - R_N$. On a :
$\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} (R_{k-1} - R_k)x^k\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} R_{k-1}x^k - \sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k\right| = \left|\sum_{k=N}^{+\infty} R_k x^{k+1} - \sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k\right| = \left|(x-1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k + R_N x^{N+1}\right| \leq \left|(x-1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k\right| + \left|R_N x^{N+1}\right| \leq \left|(x-1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k\right| + |R_N| \leq \left|(x-1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k\right| + \varepsilon$, on peut séparer la somme $\sum_{k=N+1}^{+\infty} (R_{k-1} - R_k)x^k$ car (R_n) est bornée et $|x| < 1$ (grâce à la remarque 1.1.2, le rayon de convergence de $\sum R_n x^n$ vaut au moins 1). Or : $\left|(x-1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k x^k\right| \leq (1-x)\sum_{k=N+1}^{+\infty} |R_k| x^k \leq (1-x)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \varepsilon x^k = \varepsilon x^{N+1} \leq \varepsilon$.
Ainsi : $\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq 2\varepsilon$.
Par ailleurs $\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k(x^k-1)\right) = 0$ (on a une somme finie), donc il existe $\eta \in]0,1[$ tel que :
$1-\eta \leq x < 1 \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{N} a_k(x^k-1)\right| \leq \varepsilon$.
On a donc : $1-\eta \leq x < 1 \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leq 4\varepsilon$. Ainsi $\lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Remarque 2.2.3 *Ainsi nous avons un critère pour prolonger par continuité une série entière sur* $]-R,R]$.

Exemple 2.2.2 ***(CCP 18)*** *Soit* $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$. *Montrer que* S *est continue sur* $]-1,1]$.

2.3 Dérivation et applications

2.3.1 Dérivation d'une série entière

Proposition 2.3.1 (Dérivation) ***(Démo CCP 23)*** *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière et* R *le rayon de convergence de la série entière. Alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-R, R[$*, et on a :*

$$\forall x \in]-R, R[, \ f'(x) = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}$$

De plus f *et* f' *ont le même rayon de convergence.*

Démonstration :

Exemple 2.3.1 *1. On pose* $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

(a) ***(CCP 2)*** *Décomposer* f *en éléments simples.*

(b) ***(CCP 2)*** *En déduire que* f *est développable en série entière sur un intervalle du type* $]-r, r[$*, avec* $r > 0$*. Préciser ce développement et son domaine de validité* D.

(c) *Donner le rayon de convergence et la somme de* $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+1}$.

(d) *Pour tout* x *de* $\mathbb{R}_+^*$*, calculer* $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^2 e^{-nx}$.

2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. *On veut montrer que la fonction* $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ *est décomposable en série entière sur* $]-1, 1[$.

   (a) *Montrer que cette fonction est solution de l'équation différentielle d'ordre un.*

   (b) *Chercher toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle précédente.*

   (c) *Quelle sont les solutions précédentes* h *telles que* $h(0) = 1$ *?*

   (d) *Donner le développement en série entière de* $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

3. *On rappelle que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *et :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$*. Montrer à l'aide de ceci que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$*.*

2.3.2 Application : primitivation des séries entières

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x de $]-R, R[$, comme on a convergence normale et donc uniforme de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur le segment $[0, x]$ (si $x > 0$) ou $[x, 0]$ (si $x < 0$), car il est inclus dans $D(0, R)$, et que chaque terme de la série est continu sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$, alors on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Exemple 2.3.2 *Montrer que les fonctions suivantes sont décomposables en série entière dont on déterminera le rayon de convergence.*

1. $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ *:*

2. $f(x) = \ln(1+x)$ *:*

On a : $\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$*. Or* $\sum(-1)^n x^n$ *converge si et seulement si* $|x| < 1$*, donc le rayon de convergence de* f' *vaut* 1*. Soit* $x \in]-1,1[$*. Comme* $[0,x]$ *(si* $x > 0$*) ou* $[x,0]$ *(si* $x < 0$*) sont inclus dans* $]-1,1[$*, on a donc convergence normale et donc uniforme de* $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ *sur* $[0,x]$ *ou* $[x,0]$*. De plus pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*, la fonction* $t \mapsto (-1)^n t^n$ *est continue sur* $[0,x]$ *ou* $[x,0]$*. On peut donc intégrer terme à terme :* $f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$*. Ainsi* f *est décomposable en série entière sur* $]-1,1[$ *et le rayon de convergence de* f *vaut* 1*, car* f *et* f' *ont le même rayon de convergence.*

En déduire que : $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *(attention, on réfléchira avant de dire des bêtises...).*

2.3.3 Dérivées d'ordre supérieur

Proposition 2.3.2 (Dérivées supérieures d'une série entière) ***(Démo CCP 2)*** *Soit* f *la somme de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*, de rayon de convergence* $R > 0$*.* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, on a* $\forall x \in]-R,R[,\ f^{(k)}(x) =$

et f *et* $f^{(k)}$ *ont le même rayon de convergence* R*.*

Démonstration : On montre par récurrence sur k que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-R,R[$ et que sa dérivée k-ème est donnée par la formule ci-dessus et que son rayon de convergence vaut R.
Pour $k = 0$, c'est la continuité d'une série entière.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et on suppose la propriété vraie pour ce k. Ainsi :
$\forall x \in]-R,R[,\quad f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}(m+k)(m+k-1)\dots(m+1)a_{m+k}x^m$ et le rayon de convergence de cette série entière vaut R.

Corollaire 2.3.1 (Une fonction DSE est $\mathcal{C}^\infty$) *Toute fonction développable en série entière sur* $]-R,R[$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur cet intervalle et ses dérivées successives sont aussi DSE sur* $]-R,R[$*.*

Exemple 2.3.3 1. *IMPORTANT Monter que* $h : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ *se prolonge en une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *puis montrer que* $g : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ *l'est aussi.*

2. *Montrer que* $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{p+1}}$, *avec* p *dans* $\mathbb{N}$, *est décomposable en série entière sur* $]-1, 1[$ *et donner son développement.*

Remarque 2.3.1 *Dans l'exemple précédent, pour montrer que* $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ *est continue en* 0, *cela se fait bien directement, mais les choses se compliquent ensuite pour les dérivées successives, car l'expression de* $f^{(n)}$ *est compliquée. La décomposition en série entière se révèle ici très efficace.*

2.4 Série de Taylor d'une fonction développable en série entière

Proposition 2.4.1 (Expression du DSE) ***(Démo CCP 2)*** *Soit* f *une fonction admettant une décomposition en série entière sur* $]-R, R[$ *sous la forme* $x \mapsto \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$. *Alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $a_k =$

Ainsi : $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) =$

Démonstration :

Définition 2.4.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *une fonction développable en série entière au voisinage de* 0. *La série entière* $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ *est appelée série de Taylor de* f *en* 0.

Remarque 2.4.1 1. *Cette dernière proposition nous permet de retrouver l'unicité de la décomposition en série entière car il n'y a qu'une formule possible pour les* a_k.

2. *ATTENTION ! Si* f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et même si sa série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif, il est possible que* f *ne soit pas DSE (c'est-à-dire que* f *ne soit*

pas égale à la somme de sa série de Taylor).
Cela veut donc dire qu'être DSE est plus plus fort qu'être de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Donnons un contrexemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$. Dans le chapitre 5, nous avons vu que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$. f est-elle décomposable en série entière sur $\mathbb{R}$?

Exemple 2.4.1 ***(CCP 2)***

1. *On reprend la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$ de l'exemple 2.3.1. Déterminer $f^{(p)}(0)$ pour tout p de $\mathbb{N}$.*
2. *Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.*

Remarque 2.4.2 *Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. Soit $x \in]-r, r[$. La formule de Taylor Lagrange avec reste intégrale en 0 de f à l'ordre n s'écrit :*

Ainsi f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si

On passera souvent par l'utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Exemple 2.4.2

1. *Montrer que la fonction* exp *est DSE sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $f : x \mapsto e^{ix}$ est aussi DSE sur $\mathbb{R}$.*
3. *Retrouver que : $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et en partant de la définition $e^z = e^x e^{iy}$ si $z = x + iy$, avec x et y réels.*

3 Développement en série entière : méthodes

3.1 Développements usuels en série entière

Résumons les developpements en série entière à connaître et que l'on a démontré précédemment. Soient $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{llll}
e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} & , R = +\infty & \displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n & , R = 1 \\
\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , R = +\infty & \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} & , R = 1 \\
\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , R = +\infty & -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & , R = 1 \\
\mathrm{sh}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , R = +\infty & (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n & , R = 1 \\
\mathrm{ch}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , R = +\infty & \mathrm{Arctan}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & , R = 1
\end{array}
$$

Exemple 3.1.1 *Montrer que :* $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(t) \leq e^{t^2/2}$.

3.2 Comment développer une fonction en série entière ?

3.2.1 Opérations

On peut utiliser les opérations de somme et produit de séries entières. Voici deux exemples pour la somme et pour le produit on regardera les exemples 1.2.2 et 2.2.1 qui utilisent le produit de Cauchy.

Exemple 3.2.1 *1. Développement en série entière au voisinage de* 0*, en précisant le rayon de convergence, de :* $x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$.

2. (a) ***(CCP 22)*** *Développement en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, de :* $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   (b) *Même question pour* $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} - x^2\right)$.

   (c) ***(CCP 22)*** *La série entière de f converge-t-elle pour $x = 1/4$? $x = 1/2$? $x = -1/2$? En cas de convergence, a-t-on la continuité en ces points ?*

Comme $\sum a_n(-1/2)^n$ *converge, alors par le théorème d'Abel radial,*
$\displaystyle\lim_{x\to -1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-1/2)^n = f(-1/2)$ *et donc on a la continuité en* $-1/2$.
f *est continue sur* $]-1/2, 1/2[$, *donc en* $1/4$.

3.2.2 Changement de variables

Reconnaître un DSE classique à l'aide d'un changement de variable.

Exemple 3.2.2 1. *Développer* $x \mapsto a^x$, *avec* $a > 0$ *en déterminant le domaine de validité.*

2. *Soient* $a, b \in \mathbb{C}^*$, *avec* $a \neq b$. *Décomposer en série entière* $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$, *puis* $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ *en déterminant le domaine de validité.*

3.2.3 Dérivations et intégrations

Pour la dérivation, reprendre l'exemple 2.3.3 avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$.

Pour l'intégration :

Exemple 3.2.3 *1.* ***(CCP 51)***

(a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 *de* $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$*, en précisant son rayon de convergence.*

(b) En déduire que Arcsin *est développable en série entière au voisinage de* 0 *et déterminer son développement en précisant le rayon de convergence.*

(c) Montrer la convergence puis donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

2. *Soit* $f : x \mapsto \text{Arctan}\,(1+x)$.

   (a) *Montrer que :* $f'(x) = -\dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n \sin((n+1)\frac{\pi}{4})}{(\sqrt{2})^{n+1}}x^n$ *pour* x *variant dans un intervalle à préciser.*

   (b) *Développer en série entière* f *et préciser son rayon de convergence.*

3.2.4 Équations différentielles

L'idée est de chercher une équation différentielle vérifiée par notre fonction et d'injecter $\sum a_n x^n$ dans notre équation en utilisant les formules de dérivation d'une série entière.

Exemple 3.2.4 *Soit* $f : x \mapsto e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. *Montrer que* f *est solution d'une équation différentielle à déterminer.*
2. *Justifier que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *et donner ce développement.*

3.2.5 Utilisation des formules de Taylor

On utilise plus rarement cette méthode. Voir la méthode de la décomposition en série entière de la fonction exp.

Exemple 3.2.5 *Soit* $a \in]-1,1[$. *On pose :* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $|f^{(k)}(x)| \leq \dfrac{1}{1-|a|}$.
3. *En déduire que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

3.3 Comment reconnaître un développement en série entière ?

3.3.1 Opérations

Exemple 3.3.1 *Rayon de convergence des séries entières suivantes et expression de la somme sur* $\mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$

2. $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

3.3.2 Changement de variables

Reconnaître un DSE classique à l'aide d'un changement de variable.

Exemple 3.3.2 1. *(**CCP 47**) Après avoir déterminé le rayon de convergence, calculer :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. *(**CCP 24**)*

   (a) *Déterminer le rayon de convergence de* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$*, puis exprimer* $S(x)$.

   (b) *Soit* $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right) & si \quad x > 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & si \quad x < 0 \end{cases}$ *. Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

3.3.3 Dérivations et intégrations

Exemple 3.3.3 (Pour la dérivation :) *Déterminer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

Exemple 3.3.4 (Pour l'intégration :) *Décomposer* $\dfrac{1}{1+X^3}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
Calculer $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ *pour* x *dans un intervalle à préciser.*