Correction des exercices du 06/11/2023 (Réduction)

Ex 1 : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que A et B diagonalisent dans la même base.

3. ***a.*** Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $X^2 = A$. Montrer que $AX = XA$

b. Pour ce X, en déduire que X et A diagonalisent dans la même base.

c. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation : $X^2 = A$. Même question dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Correction :

1. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 4 \\ 0 & X-1 & 2 \\ -1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 4 \\ X+1 & X-1 & 2 \\ X+1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix}$ $\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & X & -2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)X(X-1)$. Ainsi $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$ et A est donc diagonalisable, car elle est de taille 3×3 avec 3 valeurs propres distinctes.

2. Toutes les valeurs propres de A sont de multiplicité un donc pour tout $\lambda \in Sp(A)$, on a : $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, car $1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda = 1$.

On constate que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $E_{-1}(A) = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) = \operatorname{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - 4z & = & 0 \\ y - 2z & = & 0 \\ x + y - 3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 2z & = & 0 \\ y & = & 2z \\ x - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & z \\ y & = & 2z \end{array} \right.$.

Ainsi $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) = \operatorname{Ker}(I_3 - A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -x - y + 4z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \\ -x - y + 4z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{lcl} -x - y & = & \\ z & = & 0 \\ -x - y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$.

Ainsi $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\} = vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de diagonalisation de A.

On a $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = 0. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de diagonalisation de B.

3. ***a.*** $AX = X^2X = X^3 = XX^2 = XA$.

b. Comme A et X commutent alors X laisse stable les sous-espaces propres de A.
Soit $\lambda \in Sp(A)$. Soit U_λ le vecteur propre de $\mathcal{B}$ correspondant à la valeur propre λ. On a vu que $E_\lambda(A) = vect(U_\lambda)$, car les valeurs propres sont de multiplicité un.
On a $XU_\lambda \in X(E_\lambda(A)) \subset E_\lambda(A)$, car X laisse stable $E_\lambda(A)$.
Ainsi XU_λ est dans $vect(U_\lambda)$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $XU_\lambda = aU_\lambda$. Ainsi $\mathcal{B}$ est aussi une base de diagonalisation de X.

c. Analyse : Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une éventuelle solution. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de diagonalisation de A et X, grâce à la question précédente, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que : $A = PDP^{-1}$ et $X = PD'P^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Ainsi $X^2 = A$ devient $PD'^2P^{-1} = PDP^{-1}$ et donc $D'^2 = D$ et donc $\lambda_1^2 = -1, \lambda_2^2 = 0$ et $\lambda_3^2 = 1$, donc on a : $\lambda_1 \in \{-i, i\}, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 \in \{-1, 1\}$.
Examen : On pose $X = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $\lambda_1 \in \{-i, i\}, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 \in \{-1, 1\}$.
Ainsi $X^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Il n'a y pas de solutions sur $\mathbb{R}$, car en reprenant le raisonnement précédent, on aurait $\lambda_1^2 = -1$, avec λ réel.

Ex 2 : Diagonalisabilité et spectre de $A = [ij]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Correction : A est symétrique réelle : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ ij = ji$, donc elle est diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note C_j la j-ème colonne de A et $C_j = j \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = jC$, avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C, 2C, ..., nC) = \mathrm{rg}\,(C) = 1$, car $C \neq 0$.
Ainsi $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = n - 1$, grâce au théorème du rang. Comme la matrice A est diagonalisable, alors $m_0 = n - 1$ et il reste une valeur propre λ non nulle de multiplicité 1.
Or χ_A est scindé (car A est diagonalisable), donc $\underbrace{0 + ... + 0}_{n-1 \text{ fois}} + \lambda = \mathrm{tr}\,(A)$ et

donc $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ainsi A est diagonalisable et $Sp(A) = \left\{0, \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$.

Ex 3 : Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1 - x, ..., e_n - x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Correction : On note $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

On a : $\det_{\mathcal{B}}(e_1 - x, ..., e_n - x) = \begin{vmatrix} 1-x_1 & -x_2 & -x_3 & ... & -x_n \\ -x_1 & 1-x_2 & -x_3 & & \\ -x_1 & -x_2 & 1-x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ -x_1 & -x_2 & ... & -x_{n-1} & 1-x_n \end{vmatrix}$

$$\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + ... + C_n}{=} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n} x_i & -x_2 & -x_3 & ... & -x_n \\ 1-\sum_{i=1}^{n} x_i & 1-x_2 & -x_3 & & \\ 1-\sum_{i=1}^{n} x_i & -x_2 & 1-x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 1-\sum_{i=1}^{n} x_i & -x_2 & ... & -x_{n-1} & 1-x_n \end{vmatrix} = (1-\sum_{i=1}^{n} x_i) \begin{vmatrix} 1 & -x_2 & -x_3 & ... & -x_n \\ 1 & 1-x_2 & -x_3 & & \\ 1 & -x_2 & 1-x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & -x_2 & ... & -x_{n-1} & 1-x_n \end{vmatrix}$$

$= (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)$, en effectuant $C_i \leftarrow C_i + x_1 C_1$, pour i dans $[\![2, n]\!]$.

$(e_1 - x, ..., e_n - x)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si : $\det_{\mathcal{B}}(e_1 - x, ..., e_n - x) \neq 0$ si et seulement si : $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 1$.