1 Racines d'un polynôme

1.1 Racines d'un polynôme et factorisation

Proposition 1.1.1 (Factorisation avec des racines distinctes) *Soit A polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ n racines deux à deux distinctes de A. Alors il existe un polynôme Q dans $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :* $A = \left(\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right) Q$.

Corollaire 1.1.1 (Majorant du nombre de racines)

1. *Soit A un polynôme de degré n (donc non nul). Alors A admet au plus n racines distinctes.*
2. *Par contraposée si un polynôme de degré inférieur ou égal à n admet au moins $n+1$ racines disctinctes, alors il est nul. En particulier si un polynôme s'annule sur un ensemble infini, alors il est nul.*

Définition 1.1.1 (Polynôme scindé) *Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non constant de degré n et de coefficient dominant a_n qui est dans $\mathbb{K}^*$. On dit que A est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :* $A = a_n \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, *c'est-à-dire que A peut s'écrire comme produit de facteurs de degré un.*

Théorème 1.1.1 (D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine. Autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.*

Exemple 1.1.1 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+4i)z + 1 + 5i = 0$.*

1.2 Racines n-ème

Définition 1.2.1 (Racine n-ièmes de l'unité) *Les **racines n-ièmes de l'unité** sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.*

Proposition 1.2.1 (Expression des racines n-ièmes de l'unité) *Les racines n-ièmes de l'unité sont données par*

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\, k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\, k \in I\},$$

où I est un intervalle d'entiers relatifs constitué de n entiers consécutifs. Ainsi $\mathbb{U}_n$ possède n éléments.

Proposition 1.2.2 (Expression des racines n-ième d'un nombre complexe)

1. *Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. Soit z_0 une racine n-ième de μ (avec $z_0^n = \mu$). L'ensemble des racines n-ième de μ est alors l'ensemble des nombres complexes complexes uz_0, où u décrit $\mathbb{U}_n$.*
2. *Étant donné un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique $\mu = re^{i\theta}$, il possède n racines n-ièmes données par*

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})},\, k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ ou } \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})},\, k \in I,$$

avec I un intervalle de n entiers consécutifs.

1.3 Racines multiples

Définition 1.3.1 (Racines multiples) *Soient $A \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. On dit que α est* ***une racine de multiplicité ou d'ordre de multiplicité*** *k de A si $(X-\alpha)^k$ divise A et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas A.*

Proposition 1.3.1 (Multiplicité et dérivée) *Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. α est une racine de multiplicité k de A si et seulement si*
$A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $A^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

1.4 Relations entre coefficients et racines

Proposition 1.4.1 (Relations coefficients / racines) *Soit $A = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 = a_n \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ dont les racines sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$ comptées avec leur ordre de multiplicité (chaque racine étant répétée avec son ordre de multiplicité). On pose $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_k}$, pour k dans $[\![1, n]\!]$.*

Alors $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$, autrement dit : $A = a_n(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \sigma_3 X^{n-3} + ... + (-1)^n \sigma_n)$. En particulier :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 1.4.1
1. *Application au degré 2, puis factorisation de $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.*
2. *Somme et produit des racines de $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.*

2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1 Vecteurs propres, valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 2.1.1 (Vecteurs propres) *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

- *On dit que λ est valeur propre de u (resp. de A) s'il existe un vecteur x non nul de E tel que : $u(x) = \lambda x$ (resp. X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que : $AX = \lambda X$).*
  Autrement dit $\mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$
  (resp. $\mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$).
- *Dans ce cas, on dit que x (resp. X) est un vecteur propre de u (resp. A) associé à la valeur propre λ.*
  On note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u)$ (resp. $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A)$) qui est le sous-espace propre de u (resp. A) associé à la valeur propre λ.

Définition 2.1.2 (Spectre) *Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u (resp. A) est appelé spectre de u (resp. A), noté $Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$).*

Remarque 2.1.1 *Le sous-espace propre $E_0(u)$ (resp. $E_0(A)$) de u (resp. A) associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Ker}\,(u)$ (resp. $\mathrm{Ker}\,(A)$). Ainsi u est injective si et seulement si : $0 \notin Sp(u)$.*

Exemple 2.1.1
1. *Valeurs propres et sous-espaces propres de $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$.*
2. *1 est valeur propre de toute matrice stochastique (matrice ayant des coefficients positifs et dont la somme de chaque ligne vaut 1).*

Proposition 2.1.1 (Polynôme d'endomorphisme/matrices et valeurs propres) *Soit x (resp. X) un vecteur propre de u (resp. A) associé à la valeur propre λ.*

1. *On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$ (resp. $A^k X = \lambda^k X$).*
   Plus généralement pour $a_0, ..., a_n$ dans $\mathbb{K}$, on a : $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) x$
   (resp. $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k X = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) X$*),*
   soit pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $P(u)(x) = P(\lambda)x$ (resp. $P(A)X = P(\lambda)X$).
2. *Soit P dans $\mathbb{K}[X]$ qui annule u (resp. A) . Alors pour tout λ dans $Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$), on a $P(\lambda) = 0$. En particulier λ est racine de μ_u (resp. μ_A).*

Exemple 2.1.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, non bijectif, tel que : $u^3 + u^2 + u = 0$. Alors $Sp(u) = \{0\}$.*

Proposition 2.1.2 (Les sous-espaces propres sont en somme directe) *Si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u (resp. A), alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :*

$$E_{\lambda_1}(u) + ... + E_{\lambda_p}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus ... + \oplus E_{\lambda_p}(u)$$

$$\textit{(resp. } E_{\lambda_1}(A) + ... + E_{\lambda_p}(A) = E_{\lambda_1}(A) \oplus ... + \oplus E_{\lambda_p}(A)\textit{).}$$

Corollaire 2.1.1 (Majoration du nombre de valeurs propres) *Si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors u (resp. A) admet au plus n valeurs propres distinctes.*

Proposition 2.1.3 (Stabilité des sous-espaces propres) *Si $u \circ v = v \circ u$ (resp. $AB = BA$), les sous-espaces propres de u (resp. A) sont stables par v (resp. B) :*
$\forall \lambda \in Sp(u),\ v(\mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u)) \subset \mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u)$, *autrement dit : $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$*
(resp. $B(E_\lambda(A)) \subset E_\lambda(A)$).

2.2 Polynôme caractéristique

E est de dimension n.

Définition 2.2.1 (Polynôme caractéristique d'une matrice) *On considère la fonction*

$$\chi_u : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det(tId_E - u) \end{array} \right. \quad \left(\textit{resp.}\chi_A : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det(tI_n - A) \end{array} \right. \right).$$

On appelle cette fonction polynôme caractéristique que l'on note χ_u (resp.χ_A).

Proposition 2.2.1 (Expression du polynôme caractéristique)

$$\chi_u(X) = X^n - tr(u)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(u)$$

$$\textit{(resp. } \chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)\textit{).}$$

Exemple 2.2.1

1. *Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors $\chi_B(X) = X^2 - tr(B)X + \det(B)$.*
2. *Soit* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ *alors* $\chi_C(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Corollaire 2.2.1 (Racines du polynôme caractéristique) *Les racines de χ_u ou de μ_u (resp. χ_A ou de μ_A) sont les valeurs propres de u (resp. A).*

Proposition 2.2.2 (Conservation du polynôme caractéristique et du spectre par similitude) *1. Si A et A' sont semblables, alors $\chi_A = \chi_{A'}$.*

2. Deux matrices semblables ont le même spectre.

Définition 2.2.2 (Multiplicité d'une valeur propre) *Soit $\lambda \in Sp(u)$ (resp. $\lambda \in Sp(A)$). On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u (resp. χ_A). On note celle-ci m_λ.*

Exemple 2.2.2 $C = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ *a pour valeur propre $a + (n-1)b$ de multiplicité un et $a - b$ de multiplicité $n - 1$.*

Proposition 2.2.3 (Majoration des multiplicités) *1. u (resp. A) admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que si*

$Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ (resp. $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$), alors : $\sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leq n$.

2. Pour tout λ dans $Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$), on a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u)) \leq m_\lambda \leq n.$$

$$(\textit{resp. } 1 \leq \dim(E_\lambda(A)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A)) \leq m_\lambda \leq n).$$

Proposition 2.2.4 *On suppose χ_u (resp. χ_A) scindé sur $\mathbb{K}$.*

- *Si on note $\mu_1, ..., \mu_n$ les valeurs propres de u (resp. A) répétées autant de fois que leur multiplicité, c'est-à-dire : $\chi_u = \chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)$, alors*
$$tr(u) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \;\; et \;\; \det(u) = \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$
- *Si $\chi_u = \chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$. Alors on a $Sp(u) = Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et :*
$$tr(u) = tr(A) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i \;\; et \;\; \det(u) = \det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}.$$

Exemple 2.2.3 *Soit C de rang un, alors $\chi_C(X) = X^{n-1}(X - tr(C))$.*

Proposition 2.2.5 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit) *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, en notant $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit sur F par u, on a : $\chi_{\tilde{u}} | \chi_u$.*

Théorème 2.2.1 (Cayley-Hamilton)

- *Le polynôme caractéristique de u annule u. Autrement dit : $\chi_u(u) = 0$.*
- *Le polynôme caractéristique de A annule A. Autrement dit : $\chi_A(A) = 0$.*

Remarque 2.2.1 *Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.*

3 Diagonalisation

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension finie n.

3.1 Endomorphismes/matrices diagonalisables

Définition 3.1.1 (Endomorphisme/matrices diagonalisable) *1. On dit que u est diagonalisable si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :*

(a) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

(b) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.

(c) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.

(d) $n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$.

(e) χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et :* $\forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

(f) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ *scindé à racines simples tel que* $P(u) = 0$

2. Une matrice A est diagonalisable si et seulement si si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :

(a) A est semblable à une matrice diagonale (c'est-à-dire qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale).

(b) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$.

(c) $n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(A))$.

(d) χ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et :* $\forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$.

(e) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ *scindé à racines simples tel que* $P(A) = 0$

Remarque 3.1.1 *1. Avec les notations précédentes si $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.*

2. On suppose u diagonalisable et on a $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on note $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$ et on appelle $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$. Comme u est diagonalisble, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ et donc $\mathcal{B}$ obtenue en recollant les $\mathcal{B}_i$ est une base adaptée à cette décomposition de E.

Dans ce cas, on a $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_p, ..., \lambda_p)$,

où chaque λ_i est répété d_i fois.

Exemple 3.1.1 *1. Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M + 2M^T \end{array} \right.$ *f est diagonalisable et $E_3(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.*

2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes matrices de G sont diagonalisables.

Proposition 3.1.1 (Diagonalisabilité des projecteurs et des symétries) *On suppose que $E = F \oplus G$, avec F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors p et s sont diagonalisables.

Corollaire 3.1.1 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F. Si u est diagonalisable, alors $\tilde{u}$ aussi.*

Exemple 3.1.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes diagonalisables tels que : $uv = vu$. Montrer que u et v diagonalisant dans une même base.*

Proposition 3.1.2 (Condition suffisante de diagonalisation) *Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u (resp. A) est diagonalisable.*
Dans ce cas : $\forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = 1$ *(resp.* $\forall \lambda \in Sp(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = 1$*) Autrement dit ceci est valable si* χ_u *(resp. A) est scindé à racines simples.*

Exemple 3.1.3 $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & (1-X^2)P' + nXP \end{array} \right.$ *est diagonalisable.*

Théorème 3.1.1 (Théorème spectral) *Soit A une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

4 Trigonalisation

4.1 Endomorphismes et matrices trigonalisables

Dans ce paragraphe, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 4.1.1 (Endomorphismes et matrices trigonalisables)
1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que u est trigonalisable s'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de E telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *soit triangulaire supérieure.*
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Autrement dit s'il existe P dans* $GL_n(\mathbb{K})$ *telle que* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
ou $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Théorème 4.1.1
1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
   - *u est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$ *;*
   - χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *;*
   - *Il existe* $P \in \mathbb{K}[X]$ *scindé sur* $\mathbb{K}$ *tel que* $P(u) = 0$ *;*
   - μ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$.
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
   - *A est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$ *;*
   - χ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *;*
   - *Il existe* $P \in \mathbb{K}[X]$ *scindé sur* $\mathbb{K}$ *tel que* $P(A) = 0$ *;*
   - μ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$.

Exemple 4.1.1 *Soit* $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *non diagonalisable. Montrer qu'il existe* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ *et* $P \in GL_2(\mathbb{C})$ *tels que* $B = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$.

4.2 Réduction des endomorphismes et des matrices nilpotents

Proposition 4.2.1 (Caractérisation des endomorphismes/matrices nilpotentes)
- *A est nilpotent si et seulement si elle est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.*
- *u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.*

Exemple 4.2.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *nilpotente, alors* $\det(I_n + A) = 1$.

4.3 Sous-espaces caractéristiques

Dans ce paragraphe, on suppose que χ_u et χ_A sont scindés sur $\mathbb{K}$, avec $\chi_u = \chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{m_i}$.

Définition 4.3.1 (Sous-espaces caractéristiques) *On appelle sous-espaces caractéristiques de u (respectivement A) les sous-espaces*

$$F_{\lambda_i}(u) = \operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i Id_E)^{m_i}\right) \text{ (respectivement } F_{\lambda_i}(A) = \operatorname{Ker}\left((A-\lambda_i I_n)^{m_i}\right)\text{)}, \text{ pour } i \text{ dans } [\![1,k]\!].$$

Proposition 4.3.1 (Somme des sous-espaces caractéristiques) *On a :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}(u) \text{ et } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}(A).$$

Proposition 4.3.2 (Dimension des sous-espaces caractéristiques) *On a :*

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ \dim(F_{\lambda_i}(u)) = m_i \text{ et } \dim(F_{\lambda_i}(A)) = m_i.$$

Proposition 4.3.3 (Décomposition d'une matrice ou d'une endomorphisme lorsque χ_u ou χ_A est scindé)

- *On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$,*

  avec pour tout i de $[\![1,k]\!]$, la matrice T_i est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

- *On suppose que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$,*

  avec pour tout i de $[\![1,k]\!]$, la matrice T_i est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

5 Récapitulatif méthodologique pour les matrices

5.1 Récapitulatif des méthodes pour montrer la diagonalisabilité d'une matrice

Exemple 5.1.1 *Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable de quatre manières :*

1. *sans calcul, par le théorème spectral,*
2. *en déterminant χ_A et les sous-espaces propres et en montrant que : $\forall \lambda \in Sp(A),\ m_\lambda = \dim(E_\lambda)$.*
3. *en calculant A^2 pour essayer de trouver un polynôme minimal scindé à racines simples*
4. *en utilisant le rang (méthode un peu spécifique), pour trouver la multiplicité de 0 et par la trace trouver d'autres valeurs propres.*

5.2 Méthode pratique pour diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Calculer χ_A et le mettre sous forme factorisé (essayer d'utiliser dans un premier temps des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des zéros (selon l'algorithme du pivot de Gauss par exemple).
   Ensuite on peut effectuer un développement selon une ligne ou une colonne.

2. Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors A n'est pas diagonalisable.
   Si χ_A est scindé, identifier les racines de χ_A et leurs multiplicités. Ceci nous permet d'obtenir $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.
3. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, chercher $E_{\lambda_i}(A)$, en déterminer la dimension et une base. Pour cela il faudra résoudre le système $AX = \lambda_i X$ ou $(\lambda_i I_n - A)X = 0$ avec X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si on pose $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on doit résoudre le système $\begin{cases} (\lambda_i - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda_i - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (\lambda_i - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$
   Si on a : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_{\lambda_i}$, alors A est diagonalisable.

   Dans ce cas on peut poursuivre.

4. Si pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$ et $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_p)$, alors $\mathcal{B}'$ est une base de diagonalisation de A.
5. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathcal{B}'$. Alors on a : $A = PDP^{-1}$ ou $P^{-1}AP = D$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_p, ..., \lambda_p)$,
   où chaque λ_i est répété d_i fois avec $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ et les λ_i apparaissent dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants à $\mathcal{B}'$.
6. Si besoin, déterminer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot pour une matrice de petite taille (2×2 ou 3×3) ou sinon pour une matrice $n \times n$ passer par la résolution d'un système linéaire $PX = Y$. Cette dernière étape n'est pas nécessairement à faire, cela dépend de ce que l'on vous demande.

Exemple 5.2.1 *Diagonaliser* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5.3 Calcul de la puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. On a : $A = PDP^{-1}$, avec P dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors :
$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$.