1 Suites de fonctions

1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

Définition 1.1.1 (Convergence simple) *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si*

$$\forall x \in A,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit alors que la fonction f est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.1.2 (Convergence uniforme) *1. On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

2. On peut reformuler cette définition de façon plus pratique. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si : à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Proposition 1.1.1 (La convergence uniforme implique la convergence simple) *Si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.*

1.2 Méthodes pour montrer les modes de convergence

- Pour la convergence simple (CVS) : on fixe x (que l'on traite comme une constante) et on fait tendre n vers $+\infty$.

  Exemple : CVS de la suite de fonctions définies par $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \end{cases}$.
- Pour la convergence uniforme (CVU) : on cherche l'éventuelle limite f à l'aide de la convergence simple, puis :
  - On trouve, par des majorations à la main, une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que : $\forall x \in A,\ |f(t) - f_n(t)| \leq \alpha_n$. Ceci donne $\|f - f_n\|_\infty \leq \alpha_n$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

    Exemple : CVU de (f_n) avec $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \end{cases}$.
  - On trouve directement $\|f_n - f\|_\infty$ en effectuant une étude de la fonction $x \mapsto f(x) - f_n(x)$ pour trouver ses variations.

    Exemple : CVU de (f_n) avec $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-nx} \end{cases}$.
- Pour la non convergence uniforme :
  - il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $(f(x_n) - f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

    Exemple : non CVU sur $\mathbb{R}_+^*$ de (f_n), avec $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
  - (f_n) est une suite de fonctions continues CVS vers f qui n'est pas continue.
    Exemple : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$ et on n'a pas CVU de (f_n) sur $[0,1]$.

1.3 Théorèmes d'intégration, de continuité et dérivation

Théorèmes	Hypothèses			Conclusion
	Régularité	CV ou intégrabilité	Contrôle	
Continuité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$		(f_n) CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^0(I)$
Dérivabilité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$	(f_n) CVS sur I	(f_n') CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $f' = \lim f_n'$
Dérivabilité d'ordre supérieur	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$	(f_n),...,$(f_n^{(k-1)})$ CVS sur I	$(f_n^{(k)})$ CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^k(I)$ $\forall l \in [\![0,k]\!] f^{(l)} = \lim f_n^{(l)}$
Double limite		$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{a} f_n = b_n$ $a \in \overline{I}$	(f_n) CVU sur I	$\lim\limits_{a} \lim\limits_{n} f_n = \lim\limits_{n} \lim\limits_{a} f_n$
Intégration (CV dominée)	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	(f_n) CVS vers f sur I	$\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \lvert f_n \rvert \leq \varphi$	$\lim \int_I f_n = \int_I f$ $f \in \mathcal{L}^1(I)$
Intégration sur $[a,b]$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$		(f_n) CVU sur $[a,b]$	$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$

Remarque 1.3.1 1. *On peut adapter le théorème de continuité : on suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur A. Si pour tout a de A, il existe un voisinage V (relatif de A) de a tel que $(f_n|_V)$ converge uniformément vers $f|_V$, alors f est continue sur A tout entier.*

2. *Pour montrer que la limite f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, il faut appliquer la proposition précédente pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et donc il faut vérifier la convergence uniforme sur I (ou sur tout segment inclus dans I) de toutes les suites des dérivées $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (ou à partir d'un certain rang pour k).*

Exemple 1.3.1 *Convergence dominé :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt.$

1.4 Exemples classiques d'approximation uniforme

Théorème 1.4.1 ($\mathcal{E}(\lceil a,b\rfloor,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}(\lceil a,b\rfloor,\mathbb{K})$) *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

Théorème 1.4.2 (Weierstrass) *Toute fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.*

Exemple 1.4.1 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)dx = 0$. Alors $f = 0$.*

2 Séries de fonctions

2.1 Modes de convergence d'une série de fonctions

Définition 2.1.1 (Convergence simple d'une série de fonctions) *On dit que la série de fonction $\sum f_n$ est simplement convergente sur A et de somme S si pour tout x de A, la série $\sum f_n(x)$ converge et a pour somme $S(x)$.*

Autrement dit si on note $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ la somme partielle d'ordre n, alors la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers S, c'est-à-dire : $\forall x \in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S(x)$.

Dans ce cas, on a : $\forall x \in A$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Définition 2.1.2 (Convergence uniforme) *Soit $\sum f_n$ une série de fonction qui converge simplement sur A.*
La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$) converge uniformément vers 0.

Définition 2.1.3 (Convergence normale) *Une série $\sum f_n$ de fonctions est dite normalement convergente si toutes les fonctions f_n sont bornées sur A et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 2.1.1 (Implications des modes de convergence)
- *La convergence normale implique la convergence uniforme.*
- *La convergence uniforme implique la convergence simple.*

2.2 Méthodes pour montrer les modes de convergence

- Pour la convergence simple (CVS) : on fixe x (que l'on traite comme une constante) et on étudie $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ comme série classique qui dépend de n.

  Exemple : convergence et somme de la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(nx)$ sur $]-1;1[$.
- Pour la convergence normale (CVN) :
  — on montre, par des majorations à la main, qu'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$. En effet, dans ce cas, par définition de la borne supérieure, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \alpha_n$, puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$. Ainsi $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
  Exemple : CVN de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
  — On étudie les variations de $x \mapsto f_n(x)$ pour trouver $\|f_n\|_\infty$, puis on regarde si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
  Exemple : CVN sur $\mathbb{R}_+$ de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.
- Pour la non convergence normale : Trouver une suite (α_n) tel que $\sum f_n(\alpha_n)$ diverge.
  Exemple : $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x}{1+n^4x^4}$ n'est pas CVN sur $\mathbb{R}$, avec $x = 1/n$.
- Pour la convergence uniforme (CVU) sans la CVN : il suffit donc de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendante de x qui converge vers 0 telle que : $\forall x \in A, |R_n(x)| \leq \alpha_n$.
  En effet on aura donc $\|R_n\|_\infty \leq \alpha_n$, puis $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.
  Dans ce contexte le critère spécial des séries alternées peut être très pratique, car il donne facilement une majoration des restes.
  Exemple : $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour la non convergence uniforme : il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $(R(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
  Exemple : non CVU sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{nx^2}{n^3+x^2}$.

2.3 Théorèmes d'intégration, de continuité et dérivation

Théorèmes	Hypothèses			Conclusion
	Régularité	CV ou intégrabilité	Contrôle	
Continuité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$		$\sum f_n$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^0(I)$
Dérivation terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$	$\sum f_n$ CVS sur I	$\sum f_n'$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$
Dérivation d'ordre k terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$	$\sum f_n, \dots, \sum f_n^{(k-1)}$ CVS sur I	$\sum f_n^{(k)}$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $\left(\sum f_n\right)^{(l)} = \sum f_n^{(l)},\ l \in [\![0,k]\!]$
Double limite		$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_a f_n = b_n$ $a \in \overline{I}$	$\sum f_n$ CVU ou CVN sur I	$\sum b_n$ converge $\sum \lim\limits_a f_n = \sum b_n = \lim\limits_a (\sum f_n$
Intégration terme à terme cas positif	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, S \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ $\sum f_n \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	$\sum f_n$CVS vers S		$\int_I \left(\sum f_n\right) = \sum \int_I f_n$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
Intégration terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ $\sum f_n \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	$\sum f_n$CVS vers S $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}^1(I)$	$\sum \int_I \lvert f_n \rvert$ CV	$\int_I \left(\sum f_n\right) = \sum \int_I f_n$
Intégration sur $[a,b]$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$		$\sum f_n$CVU ou CVN sur $[a,b]$	$\int_a^b \left(\sum f_n\right) = \sum \int_a^b f_n$

Remarque 2.3.1 *1. Pour montrer qu'une série de fonction est $\mathcal{C}^\infty$:*

- *pour tout n, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*
- *pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment inclus dans I).*

On pose $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ S^{(j)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

2. Pour géraliser la continuité sur un evn :

- *Si pour tout n, la fonction f_n est continue sur A.*
- *Si pour tout a de A, il existe un voisinage V (relatif de A) de a tel que $\sum f_n|_V$ converge uniformément ou normalement .*

Alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Exemple 2.3.1 *1. Continuité :*

- *Avec la CVU : $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Avec la CVN : $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.*

2. Dérivabilité :

- *$x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.*
- *$\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.*

3. Double limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^4}\right) = 0$.

4. Intégration terme à terme : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Remarque 2.3.2 *Pour rechercher des équivalents de séries de fonctions, on utilise souvent des comparaisons séries/intégrales.*

Exemple : déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.